第六章 機率分配與期望值

6-1 隨機變數

隨機實驗(random experiments)的樣本空間如果不是實數值(real value)或是其結果的呈現方式與研究目的不完全契合，使得討論有意義事件發生的機率變得困難。因此這裡我們引入一個法則，將實驗的樣本空間對應到實數上，這是一個函數作用，我們稱為隨機變數(random variable, *RV*)。

隨機變數是一個定義在樣本空間上的實數值函數，通常用大寫的英文字母表示。

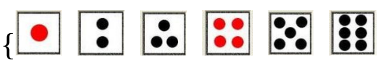
$$X : S \mapsto R$$

其意義為隨機變數 X 將樣本空間的元素 S ，對應到實數值 R 。簡單說，就是以實數來記錄資料。

隨機變數是一個定義在樣本空間上的實數值函數，任何不同類型實驗資料，都可經由隨機變數的函數作用將其實驗結果對應到實數上，稱為樣本空間上的實數值函數。樣本空間與實數值的對應關係，並非限定於某種特定形式。它可以依據研究的目的而更改。

例 6- 1

投擲一個骰子的隨機實驗，樣本空間為

S={}

(a) 隨機變數 X 的定義為

X(⚀)=1, X(⚁)=2, X(⚂)=3, X(⚃)=4, X(⚄)=5, X(⚅)=6

將實驗結果以實數1,2,3,4,5,6 記錄之

(b) 隨機變數 Y 的定義為

Y(⚀)=1, Y(⚁)=2, Y(⚂)=2, Y(⚃)=1, Y(⚄)=2, Y(⚅)=2

紅色記為 1,黑色記為 2

(c) 甲關心是否出現大於 3 的數，其對應關心如下：

$$W: \quad \left.\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right\}\rightarrow 0 \qquad \left.\begin{matrix}4\\5\\6\end{matrix}\right\}\rightarrow 1$$

(d) 乙關心是否出現偶數，其對應關心如下：

$$Z: \quad \left.\begin{matrix}1\\3\\5\end{matrix}\right\}\rightarrow 0 \qquad \left.\begin{matrix}2\\4\\6\end{matrix}\right\}\rightarrow 1$$

例 6- 2

袋中有 6 顆號碼球, ① ② ③ ④ ⑤ ⑥, 隨機抽出兩球(不放回), 令 X 代表兩號碼球的和, 請問

(1) 隨機實驗的樣本空間?

(2) 隨機變數 X 的所有可能值與樣本空間與這些可能值的對應關係 (mapping relation) 。

(3) 請利用古典機率法說明隨機變數 X 的機率分配。

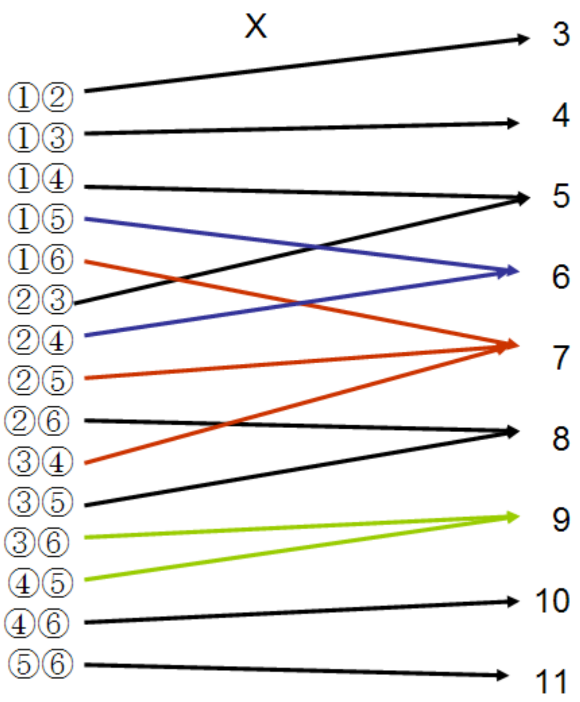
解:

(1) 隨機實驗的樣本空間為

Ω={①②,①③,①④,①⑤,①⑥,②③,②④,②⑤,②⑥,③④,③⑤,③⑥,④⑤,④⑥,⑤⑥}

(2) 隨機變數 X 的可能值為 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

樣本空間與可能值的對應關係如下圖，例如：X(①②)=3, X(②④)=6



(3) 隨機變數 X 的機率分配

可能值 x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	合計
次數	1	1	2	2	3	2	2	1	1	15
f(x)	1/15	1/15	2/15	2/15	3/15	2/15	2/15	1/15	1/15	1.0

因為 $f(x)=P(X=x)$，可得 $f(3)=1/15, f(6)=2/15$

例 6- 3

有 6 位學生，編號 ① ② ③ ④ ⑤ ⑥，隨機抽出兩位學生調查他們本週的曠課時數(不放回)，假設學生曠課時數為

編號	①	②	③	④	⑤	⑥
曠課時數	0	3	2	2	1	1

令 X 代表兩位學生曠課時數的和，請問

(1) 隨機實驗的樣本空間?

(2) 隨機變數 X 的所有可能值與樣本空間與這些可能值的對應關係 (mapping relation) 。

(3) 請利用古典機率法說明隨機變數 X 的機率分配。

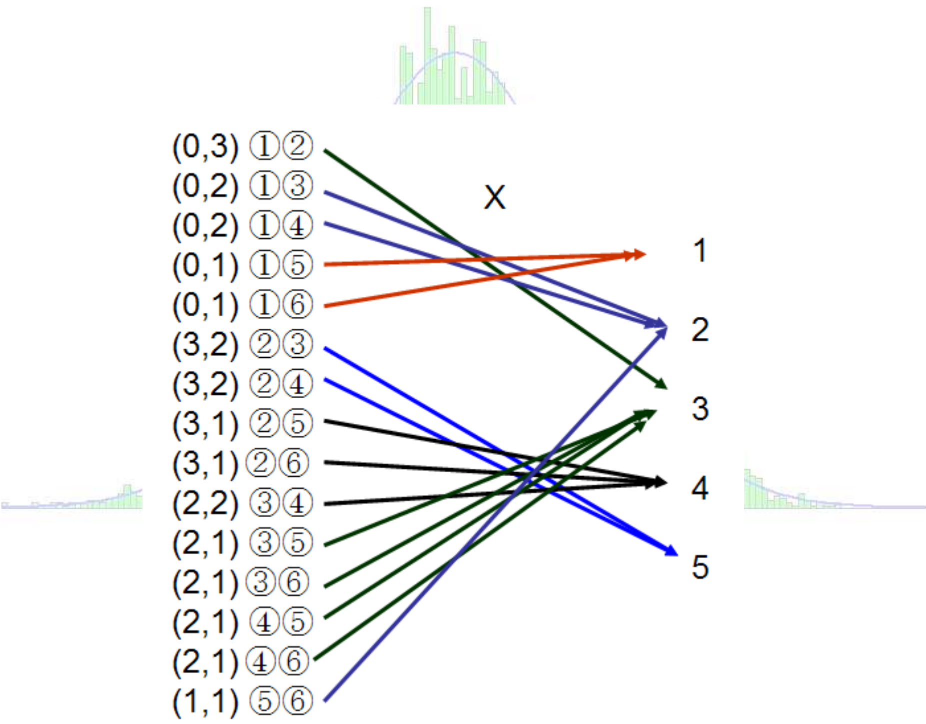
解：

(1) 隨機實驗的樣本空間為

Ω={①②,①③,①④,①⑤,①⑥,②③,②④,②⑤,②⑥,③④,③⑤,③⑥,④⑤,④⑥,⑤⑥}

(2) 隨機變數 X 的可能值為 1, 2, 3, 4, 5

樣本空間與可能值的對應關係如下圖, 例如: X(①②)=4, X(②④)=5。



(3) 隨機變數 X 的機率分配

可能值 x	1	2	3	4	5	合計
次數	2	3	5	3	2	15
f(x)	2/15	3/15	5/15	3/15	2/15	1.0

因此，當我們要討論事件發生的機率，可以統合考慮其在實數值上發生的機

率。這發生的機率，我們稱為隨機變數的機率分配 (probability distribution)。隨機變數依其在實數上分布的連續性，大致可分成間斷型與連續型兩者， 因此，其對應的機率分配亦可分成間斷型機率分配 (discrete probability distribution) 與連續型機率分配 (continuous probability distribution)。

6-2 機率分配

一個隨機變數 X 的累積分配函數 (cumulative distribution function) $F(x)$ 定義為

$$F(x) = P(X \le x) \tag{6.1}$$

其中 $X \le x$ 為事件 $\{\omega \mid X(\omega) \le x\}$，在樣本空間中蒐集滿足 $X(\omega) \le x$ 的元素所成的集合。

例 6- 4

擲一個公平的銅板 3 次，樣本空間為
$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$，令隨機變數 X 代表正面的次數，當 $\omega = HHH$ 時，$X(\omega) = 3$，當 $\omega = HTH$ 時，$X(\omega) = 2$。事件 $X \le 1$ 為事件 $\{\omega \mid X(\omega) \le 1\} = \{TTT, THT, TTH, HTT\}$。

根據機率公理和式(6-1)，累積分配函數具有以下特性

(1) $0 \le F(x) \le 1$。

(2) $F(x)$ 是一個遞增函數，即對任意 $x_i < x_j$，皆有 $F(x_i) \le F(x_j)$。

(3) $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$。

(4) $F(x)$ 是一個右連續函數，即對任意 $x \in R$，皆有 $F(x) = F(x+)$。

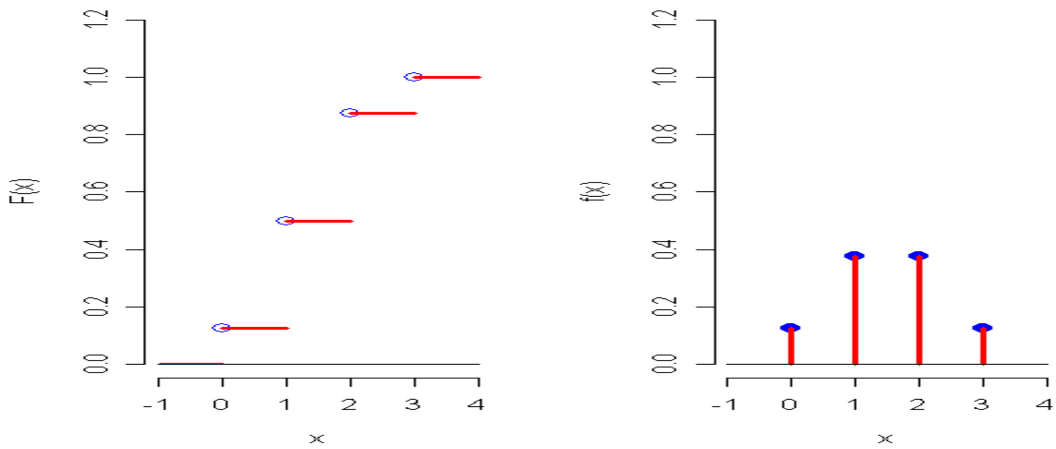
註：x+：比 x 大，但相差為 0 ； x-：比 x 小，但相差為 0

例 6- 5

接續例 6.1。樣本空間共有 8 個元素，在銅板公平的假設下，每一個元素有相同的出現機會，它們發生的機會皆為 1/8。

表 3.1 擲 3 次公平銅板的機率分配

x	$\{\omega \mid X(\omega) \le x\}$	$F(x)$	$f(x)$
0	$\{TTT\}$	1/8	1/8
1	$\{HTT, THT, TTH, TTT\}$	4/8	3/8
2	$\{HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$	7/8	3/8
3	$\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$	1.0	1/8



6-2.1 間斷型機率分配

讓 $F(x)$ 為隨機變數 X 的累積分配函數，且令 $f(x) = F(x) - F(x-)$。假設存在一個 X 的變量集合 $\{x_i\}$，$x_i < x_{i+1}, i = 1,2,....$ 是隨機變數 X 的一個支持集合，滿足

(a) $f(x) = \begin{cases} F(x) - F(x-) > 0, & x \in \{x_i\} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，且

(b) $\sum f(x_i) = 1$

我們稱 $f(x)$ 為 X 的間斷型機率分配。

例 6- 6

接續例 6.2。我們可得 X 的機率分配，如下：

$$f(x)=\begin{cases}1/8, & x=0;\\ 3/8, & x=1;\\ 3/8, & x=2;\\ 1/8, & x=3;\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

間斷型隨機變數通常可以清楚描述一個隨機實驗機制 (the mechanism of an experiment)，了解實驗進行方式可以協助解析機率分配，其代表隨機變數各種可能結果發生的機率值。

例 6- 7

紀錄某公司 100 產品不良數，其次數分布表如下：

不良數	0	1	2	3	4	5	6	7
天數	75	12	7	2	2	1	1	0
相對次數	0.75	0.12	0.07	0.02	0.02	0.01	0.01	0

讓不良數代表每日觀察的情形，其為一個隨機變數，上表中的相對次數即為此隨機變數分布的機率分配。

□

由以上說明，可知一個間斷型機率分配函數 $f(x)$ 為定義在隨機變數上的實數值函數。因為 $F(x_i)-F(x_i-)=P(X=x_i)$，所以 $f(x)=P(X=x)$， $f(x)$ 代表對應事件發生的機率值。必須滿足以下性質：

$(a)\quad 0\le f(x),$

$(b)\quad \sum f(x)=1$

$(c)\quad P(X\in E)=\sum_{X\in E} f(x)$

性質 (a) 代表我們對機率值的普遍共同的認定，其必須是正值。性質 (b) 說明任一隨機變數的機率值總和必須為 1。接續上述的例 6- 7，假設工程師想要知道不良數小於或等於 2 個的機率，我們可以計算累加相對次數，得到機率值為 0.94。此一機率值我們稱為不良數隨機變數的累積機率。我們可以得到下表不良數的累加機率值。

不良數	0	1	2	3	4	5	6	7
天數	75	12	7	2	2	1	1	0
相對次數	0.75	0.12	0.07	0.02	0.02	0.01	0.01	0
累加相對次數	0.75	0.87	0.94	0.96	0.98	0.99	1.00	1.00

觀察上表，我們發現一間斷型隨機變數 X 的機率分配函數為 $f(x)$，累積分配函數 $F(x)$，兩者的關係為

- $F(x_0)=0, x_0<x_1,$
- $F(x_i)=\sum_{x\le xi} f(x),$
- $f(x_i)=F(x_i)-F(x_i-1)$

例 6- 8

接續上題，利用兩種方式計算 $f(2), f(3)$ 之值。

$f(2)=F(2)-F(1)=0.94-0.87=0.07$

$f(3)=f(1)+f(2)+f(3)=0.96$

例 6- 9

間斷型隨機變數 X 的機率分配為

$f(x)=\dfrac{3x-2}{22}, x=1,2,3,4$ 試求 X 的累積分配函數

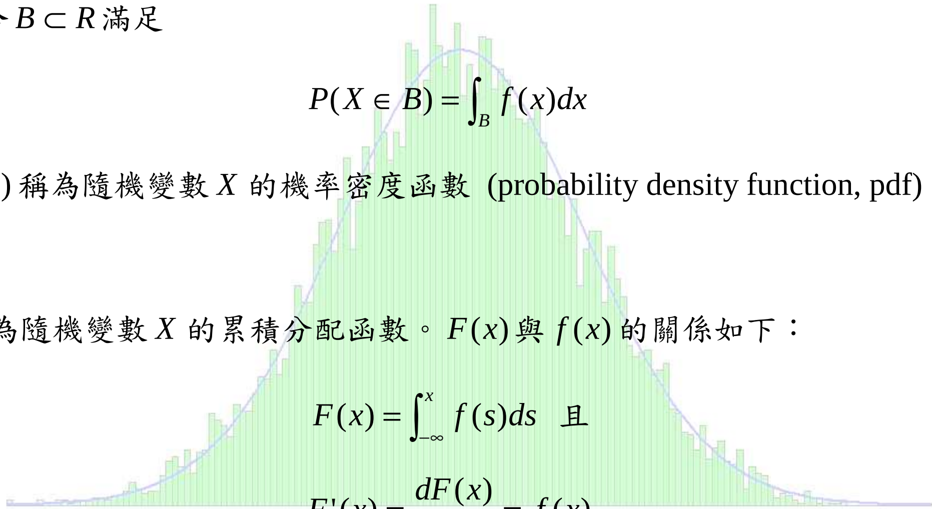
解：

$f(1)=\dfrac{1}{22}, f(2)=\dfrac{4}{22}, f(3)=\dfrac{7}{22}, f(4)=\dfrac{10}{22}$

$$F(X)=\begin{cases}0\ , & x\le 1\\ \frac{1}{22}\ , & 1<x\le 2\\ \frac{5}{22}\ , & 2<x\le 3\\ \frac{12}{22}\ , & 3<x\le 4\\ 1\ , & x>4\end{cases}$$

6-2.2 連續型機率分配

連續型隨機變數的定義如下：對於隨機變數 X，存在一個函數 $f(x)\ge 0$，使得對任意集合 $B\subset R$ 滿足



$$P(X\in B)=\int_B f(x)dx$$

其中 $f(x)$ 稱為隨機變數 X 的機率密度函數 (probability density function, pdf)。

讓 $F(x)$ 為隨機變數 X 的累積分配函數。$F(x)$ 與 $f(x)$ 的關係如下：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(s)ds \quad 且$$

$$F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$$

例 6- 10

設 X 為一連續型隨機變數，其機率密度函數為

$$f(x)=\begin{cases}cx^2, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(1) 求 c 值。

(2) 求 $P(X>1)$ 之值。

解：

(1) 因為 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 cx^2dx=\left.\frac{cx^3}{3}\right|_0^2=\frac{8c}{3}$，所以， $c=\frac{3}{8}$

(2) $P(x>1)=\int_1^2 \frac{3}{8}x^2dx=\frac{1}{8}x^3\Big|_1^2=\frac{8-1}{8}=\frac{7}{8}$

機率密度函數的意義

間斷型隨機變數的機率分配又稱為機率質量函數(probability mass function, pmf)，其值代表隨機變數等於 x 的機率。然而，連續型隨機變數的機率密度函數並非隨機變數等於 x 發生的機率，事實上連續型隨機變數出現任何指定數值的機率為零。例如，我們可以假設 LED 燈泡的壽命是一個連續型隨機變數，要看到 LED 燈泡在某一個指定的時間(毫無誤差)失效，這樣的機率為零。我們能夠說明的是 LED 燈泡在某一個時段內失效的機率，如果這個時段是一個很小的範圍 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$，LED 燈泡在此時段失效的機率極為近似

$$2\varepsilon f(x)$$

換言之，$f(x)$ 是用來衡量隨機變數 X 在 x 附近發生的相對可能性。

例 6- 11

如前所述，假設隨機變數 X 代表 LED 的使用壽命(時)，其 p.d.f 為

$$f(x)=\frac{1}{6000}e^{\frac{-x}{6000}}dx, x>0$$

請問：

(1) 驗證 $f(x)$ 滿足機率分配函數的條件？

(2) 假設 LED 的保固時間為 2000 個小時，請問使用壽命低於保固時間的比例？

解：

(1) 因為

$$\int_0^\infty \frac{1}{6000}e^{\frac{-x}{6000}}dx = -e^{\frac{-x}{6000}}\Big|_0^\infty = 1-0=1$$

且 $f(x)>0$，所以，$f(x)$ 滿足 p.d.f 的條件。

(2) $P(X > 2000)$

$$= \int_{2000}^{\infty} \frac{1}{6000} e^{\frac{-x}{6000}} dx$$

$$= e^{\frac{-2000}{6000}} = e^{\frac{-1}{3}} = 0.7165$$

若該產品保固 2000 小時，將有 $P(X \le 2000) = 1 - 0.7615 = 0.2835$ 的比率須有保固

6-3 隨機變數的期望值

考慮一個擲骰子隨機實驗，擲一次骰子的樣本空間為 $S = \{1,2,3,4,5,6\}$。重複相同的實驗 20 次，紀錄每次出現的點數

5 5 2 2 1 1 4 4 6 5 6 5 6 4 1 6 4 1 1 3

不要忘記第二章處理資料的方法。首先，我們將資料排序如下

1 1 1 1 1 2 2 3 4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 6

並製作次數分配表，

x	1	2	3	4	5	6
次數	5	2	1	4	4	4
相對次數	0.25	0.1	0.05	0.2	0.2	0.2

這 20 次實驗的平均點數為

$$\bar{x} = \frac{5+5+2+2+1+1+4+4+6+5+6+5+6+4+1+6+4+1+1+3}{20} = 3.6$$

根據次數分配表，我們有一個更簡潔的計算方法為

$$\bar{x} = \frac{5\times 1 + 2\times 2 + 1\times 3 + 4\times 4 + 4\times 5 + 4\times 6}{20}$$
$$= 1\times 0.25 + 2\times 0.1 + 3\times 0.05 + 4\times 0.2 + 5\times 0.2 + 6\times 0.2 = 3.6$$

這個例子讓我們得出簡易的計算公式

樣本平均值$=\sum$出現的數值×相對次數

我們試想我們不斷地重複這樣的實驗，實驗結果的平均值會如何？他會是一個常數且數值為何？若骰子是公平的，公平的概念就是樣本空間的每一種可能出現的

機會相同，也就是擲一次骰子的隨機實驗的機率分配為

$$f(x)=\begin{cases}1/6, & x=1,2,3,4,5,6\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

當這個實驗持續下去，上表的相對次數應該收斂到 1/6(如果不是，這個骰子就不能稱作公平了)。現在我們相信，重複不斷地實驗，可以讓相對次數收斂，而樣本平均值也因此收斂到一個常數，這個常數我們稱作期望值(expected value)。所以，我們可以這樣解釋期望值，它就是一個隨機變數出現結果的理論的平均值(theoretical average)。

隨機變數 X 的期望值

設隨機變數 X 的機率分配函數為 $f(x)$，符合一般條件下，隨機變數 X 的期望值為

$$E(X)=\begin{cases}\sum xf(x), & \text{間斷型}\\ \int xf(x)dx, & \text{連續型}\end{cases}$$

至於連續型隨機變數的期望值，可以定義為 $\int xf(x)dx$?我們考慮將實數線切成無數不相交小線斷，線斷中點為 $x_1,x_2,\ldots$，每一線斷長度固定為 dx，所以，隨機變數在此線段發生的機率近似 $f(x_i)dx$，以 $x_1,x_2,\ldots$ 代表線段中任意值，所以期望值近似 $\sum x_i f(x_i)dx$。當切割越來越精細，將使得 $\sum x_i f(x_i)dx$ 收斂到 $\int xf(x)dx$。

例 6- 12

設 X 為一連續型隨機變數，其機率密度函數為

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^2, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

因為 $\int_0^2 x(\frac{1}{9}x^2)dx=\frac{1}{36}x^4\Big|_0^2=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$，所以 $E(X)=4/9$。

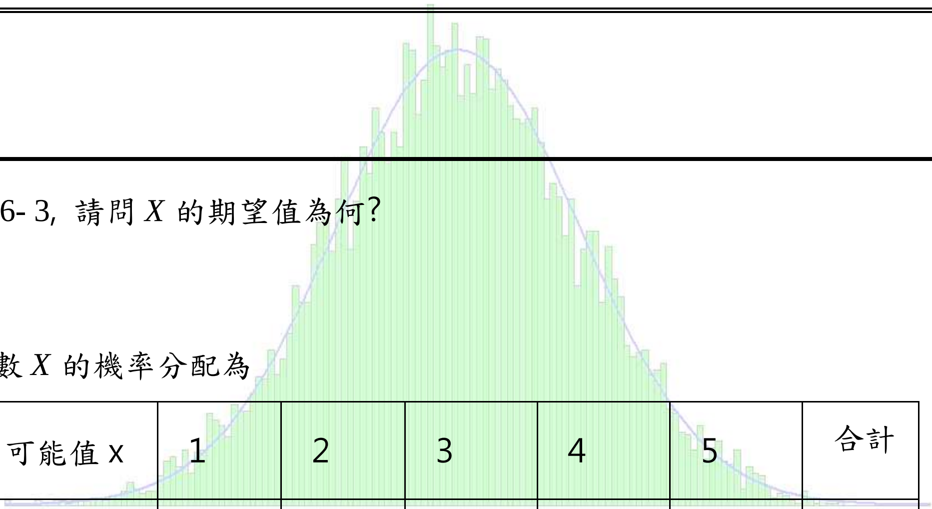
接續例 6- 2 例題 1, 請問 X 的期望值為何?

解：

隨機變數 X 的機率分配為

可能值 x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	合計
次數	1	1	2	2	3	2	2	1	1	15
$f(x)$	1/15	1/15	2/15	2/15	3/15	2/15	2/15	1/15	1/15	1.0
$xf(x)$	3/15	4/15	4/15	12/15	21/15	16/15	18/15	10/15	11/15	7

$$E(X)=\sum xf(x)=\frac{3+4+12+21+16+18+10+11}{15}=7$$



接續例 6- 3, 請問 X 的期望值為何?

解：

隨機變數 X 的機率分配為

可能值 x	1	2	3	4	5	合計
次數	2	3	5	3	2	15
$f(x)$	2/15	3/15	5/15	3/15	2/15	1.0
$xf(x)$	2/15	6/15	15/15	12/15	10/15	3

$$E(X)=\sum xf(x)=\frac{2+6+15+12+10}{15}=3$$

例 6- 13

設 X 為一連續型隨機變數，其機率密度函數為

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

請計算隨機變數 X 的期望值。

解：

因為

$$\int_0^2 x(\frac{3}{8}x^2)dx = \frac{3}{32}x^4\Big|_0^2 = \frac{3\times16}{32} = \frac{3}{2}$$

所以，$E(X) = 1.5$。

例 6- 14

設 X 為一連續型隨機變數，其機率密度函數為

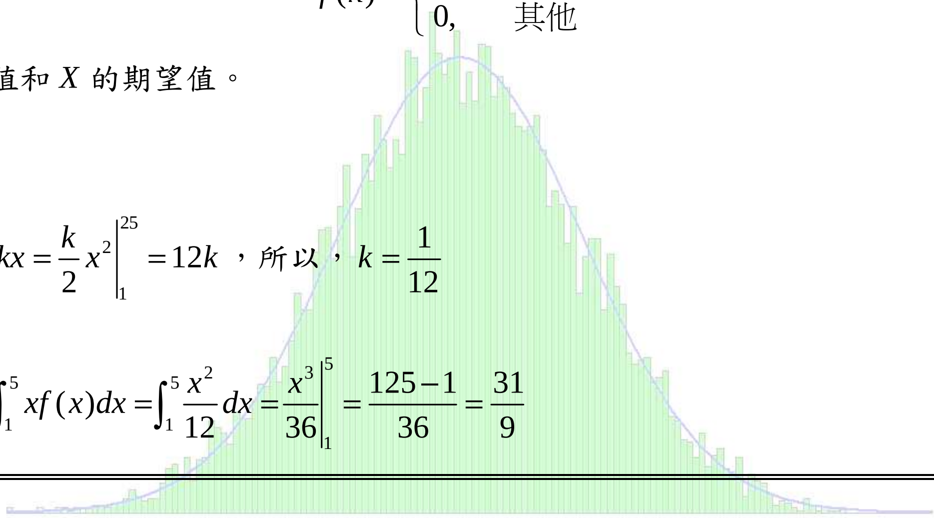
$$f(x) = \begin{cases} kx, & 1 < x < 5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

請求 k 值和 X 的期望值。

解：

因為 $\int_1^5 kx = \frac{k}{2}x^2\Big|_1^{25} = 12k$，所以，$k = \frac{1}{12}$

$$E(X) = \int_1^5 xf(x)dx = \int_1^5 \frac{x^2}{12}dx = \frac{x^3}{36}\Big|_1^5 = \frac{125-1}{36} = \frac{31}{9}$$



例 6- 15

設 X 為一離散型隨機變數，其機率質量函數為

$$f(x) = \begin{cases} kx, & x = 1,2,3,4,5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

請求 k 值和 X 的期望值。

解：

因為 $\sum_{x=1}^{5} f(x) = 15k$，所以，$k = \frac{1}{15}$。

$$E(X) = \sum_{x=1}^{5} xf(x) = \sum_{x=1}^{5} \frac{x^2}{15} = \frac{55}{15} = \frac{11}{3}$$

6-4 隨機變數函數的期望值

設 $g(X)$ 是隨機變數 X 的函數，我們如何計算 $g(X)$ 的期望值呢？在回答這個問題前，我想想是否有真實的例子，讓我們必須考慮這樣的問題？譬如，經銷每台售價 30,000 的飲水機，每日的利潤（Y）與當日出售台數（X）的關係如下。

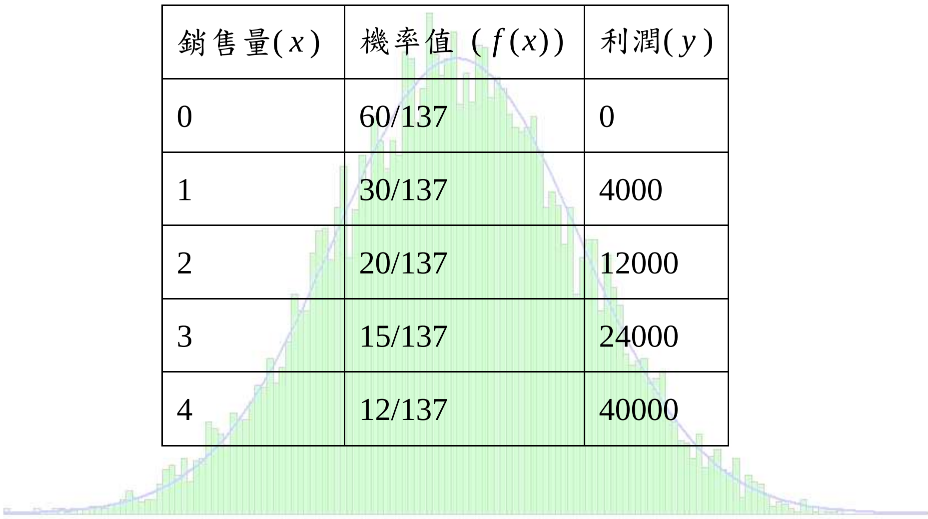
$$Y = g(X) = \begin{cases} 2000X(X+1), & X = 1,2,3 \\ 10000X, & X = 4,5\cdots \end{cases}$$

每台平均利潤為

$$Y/X = g(X)/X = \begin{cases} 2000(X+1), & X = 1,2,3 \\ 10000, & X = 4,5,\cdots \end{cases}$$

依據經驗，每天銷售量（X）的機率分配為

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{60}{137(x+1)}, & x = 0,1,2,3,4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



銷售量(x)	機率值（$f(x)$）	利潤(y)
0	60/137	0
1	30/137	4000
2	20/137	12000
3	15/137	24000
4	12/137	40000

銷售量的期望值為

$$E(X) = \sum xf(x) = \frac{30+40+45+48}{137} = \frac{163}{137}$$

根據期望值的定義，要計算利潤的期望值必須有利潤的機率分配函數。假設利潤的機率分配函數為 $h(y)$，

由上表，我們知道 $h(y)$ 與 $f(x)$ 的關係為 $h(y) = f(g^{-1}(y))$ 或者 $h(g(x)) = f(x)$。這些符號只是為了輔助說明 $f(y)$，和 $f(x)$ 經由函數 g 產生的對應關係。例如 $f(1) = h(4000)$。

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \sum yh(y) = \sum g(x)f(x) \\
&= \frac{4000\times30+12000\times20+24000\times15+40000\times12}{137} \\
&= \frac{1,200,000}{137} \approx 8759.124
\end{aligned}
$$

由以上的例子說明，我們總結**隨機變數函數** $g(X)$ **的期望值**為

$$
E(g(X)) = \begin{cases} \sum g(x)f(x), & \text{間斷型} \\ \int g(x)f(x)dx, & \text{連續型} \end{cases}
$$

期望值的性質

假設a,b為任意常數，函數 $g(X)=aX+b$的期望值為

$$
E(aX+b) = \begin{cases} \sum (ax+b)f(x) = a\sum xf(x) + b\sum f(x) = aE(X)+b, & \text{間斷型} \\ \int (ax+b)f(x)dx = a\int xf(x)dx + b\int f(x)dx = aE(X)+b, & \text{連續型} \end{cases}
$$

當$a=0$，得$E(b)=b$，表示常數的期望值等於其值。例如，$E(5)=5$。

例如：假設隨機變數 X 的期望值為 5，令$Y=3X+2$，$E(Y)=3\times5+2=17$

6-4.1 隨機變數的變異數

隨機變數X的變異數定義為$Var(X)=E(X-u)^2$。即令 $g(X)=(X-\mu)^2$，用隨機變數X與其平均值差距的平方的期望值衡量隨機變數變異的程度。當差距小，即變異程度小，差距大反映隨機變數有大的變異，換言之隨機變數的觀察值的差異會是大的。

因為

$$(X-\mu)^2 = X^2 - 2\mu X + \mu^2,$$

根據期望值的性質，我們可以得到以下的結果

$$Var(X)=E(X-u)^2 = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

變異數是衡量分散程度的參數，所以當資料平移將不會影響到整體的分散程度。也就是對任意常數a，我們皆可以得到以下的結果

$$Var(X+a)=Var(X)$$

我們可以假設 X 代表隨機抽一位學生的身高，假設量具出現問題，造成身高比實際身高少了 2 公分，然而這個問題並不會影響到我們對同學身高差異性的了解，但是會影響到對整體平均身高的了解。

然而，假若量具有放大或縮小的作用時，對變異數就有影響了。假設 $Y = aX$ ， Y 是同學身高的讀值，X 是正確的身高。$a > 1$，表示量具有放大作用，$a < 1$ 表示量具有所小的作用。假設 μ_x, μ_y 分別是 X 和 Y 的期望值，她們的關係為

$\mu_y = a\mu_x$ (註)。根據變異數的定義，Y 的變異數為

$$Var(Y) = E(Y - u_y)^2 = E(aX - a\mu_x)^2 = a^2 E(X - \mu_x)^2 = a^2 Var(X)$$

上式清楚說明，具有放大作用的量具會將整體變異數放大 a^2 ，反之則縮小。

綜合以上分析，我們可以得到以下**變異數的性質:**

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

例 6- 16

已知隨機變數 X 的期望值與變異數為 $E(X) = 5, Var(X) = 4$ ，請求

(1) $E(3X + 5)$, (2) $Var(2X + 3)$, (3) $E(X^2)$, (4) $E(-2X^2)$, (5) $Var(-2X)$

解：

$(1) E(3X) + 5 = 3 \times 5 + 5 = 20$

$(2) Var(2X + 3) = 2^2 \times 4 = 16$

$(3) E(X^2) = Var(X) + [E(X)]^2 = 4 + 25 = 29$

$(4) E(-2X^2) = -2 \times 29 = -58$

$(5) Var(-2X) = (-2)^2 \times 4 = 16$

習題

1. 隨機投擲一個銅板三次，假設出現正面的機率為 0.3，令 X 表出現正面的次數，試求隨機變數 X 之機率函數及累積機率函數。

2. 某隨機變數的期望值為 4，隨機變數平方的期望值為 25，則該隨機變數的標準差為何？

3. 假設一個離散型隨機變數的機率質量函數如下：

$$f(x)=\begin{cases}0.1, & x=0\\ 0.2, & x=1\\ 0.3, & x=2\\ 0.4, & x=3\end{cases}$$

請畫出累積分配函數圖，並計算此隨機變數的期望值與變異數。

4. 檢驗三台電視，以隨機變數 X 表不良品，其機率分配如下。

(a) 請求 a 值。

(b) 試求其期望值與變異數。

X	0	1	2	3
P（X=x ）	a	0.38	0.10	0.01

5. 若 $E(X)=5, E(X^2)=50$，請問變異數為何？

6. 若 $E(X)=2$，$E(X^2)=10$，請問 $E(X^2)$ 為何？

7. 下列函數為某隨機變數的 X 之機率函數，請問下列 k 值為何?

(a) $f(x)=\begin{cases}k(3x+1) & ，x=0,1,2,3,4,5\\ 0 & ，其他\end{cases}$。

(b) $f(x)=\begin{cases}kC_x^2C_{3-x}^3 & ，x=0,1,2\\ 0 & ，其他\end{cases}$。

(c) $f(x)=\begin{cases}k(\frac{4}{5})^{x-1} & ，x=0,1,2,3,\ldots,\infty\\ 0 & ，其他\end{cases}$

8. 若一離散型隨機變數 X 之累積分配函數 $F(x)$ 如下：

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<-1 \\ \frac{1}{5} & , \quad -1\le x<2 \\ \frac{1}{2} & , \quad 2\le x<5 \\ \frac{2}{3} & , \quad 5\le x<6 \\ 1 & , \quad x\ge 6\end{cases}$$

(a)　請找出 *R. V.* X 的 p.m.f.　$f(x)$？

(b)　請找出 $P(X>3)=$?

(c)　請找出 $P(-0.5<X<4)=$?

9. 令一連續型 R.V.　X 之機率函數

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6} & , \quad 若 0\le x\le 2 \\ ax & , \quad 若 2\le x\le 3 \\ 0 & , \quad 其他\end{cases}$$ 。試求，

(a) $a=$？

(b)　$P(2<X\le 3)=$？

(c)　*R. V.* X 之 C.D.F　$F(x)$ 為何？

10. 令一連續型 R.V.　X 之 C.D.F. 如下：

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x>0 \\ \frac{x^2}{25} & , \quad 0\le x\le 5 \\ 1 & , \quad x>5\end{cases}$$ 。試求，

(a)　$P(X>2)=$？

(b)　$P(2<X<3)=$？

(c)　*R. V.* X 之 p.d.f.　$f(x)$　為何？

11. 同第 5 題，請計算(a), (b)和(c)機率分配函數的期望值與變異數。

12. 同第 6 題，請計算隨機變數的期望值與變異數。

13. 同第 7 題，請計算隨機變數的期望值與變異數。

14. 若某投資公司預估下個年度該公司獲利金額的機率分配如下：(單位：百萬)

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.10	0.15	0.20	0.20	0.2	0.10

試問，

(a)該公司下年度公司獲利金額的期望值為何？

(b)公司獲利金額的變異數為何？

(c)標準差為何？

15. 若一個連續型隨機變數 X 之機率密度函數為

$$f(x)=\begin{cases} c(1-x) & ，\quad 0\le x\le 1 \\ 0 & ，\quad \text{其他} \end{cases}$$

(a) 請求 c 值。

(b) 試問其 $E(X)$ 和 $E(X^2)$ 為何？

(c) 利用(b)的結果，計算 $Var(X)$ 和 $E(X(X-1))$。

16. 若一連續型隨機變數 X 之機率密度函數

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\theta}e^{-2x} & ，\quad x>0 \\ 0 & ，\quad \text{其他} \end{cases}$$

(a) 請求 θ 值。

(b) 試問其 $E(X)$ 和 $E(X^2)$ 為何？

17. 假設鋼板厚度規格（厚度）的機率密度函數為

$$f(x)= f(x)=\begin{cases} \dfrac{\varpi}{x^2} & ，\quad 110<x<120(mm) \\ 0 & ，\quad \text{其他} \end{cases}$$

(a) 請求 ϖ 值。

(b)求鋼板厚度的期望值與標準差。

18. 令 X 為一隨機變數，其機率分配如下：若 $W=X^2+2$，則 $E(W)$ 為：

x	0	1	2
$f(x)$	0.2	0.5	0.3

19. 若一離散型隨機變數 X 之機率函數為

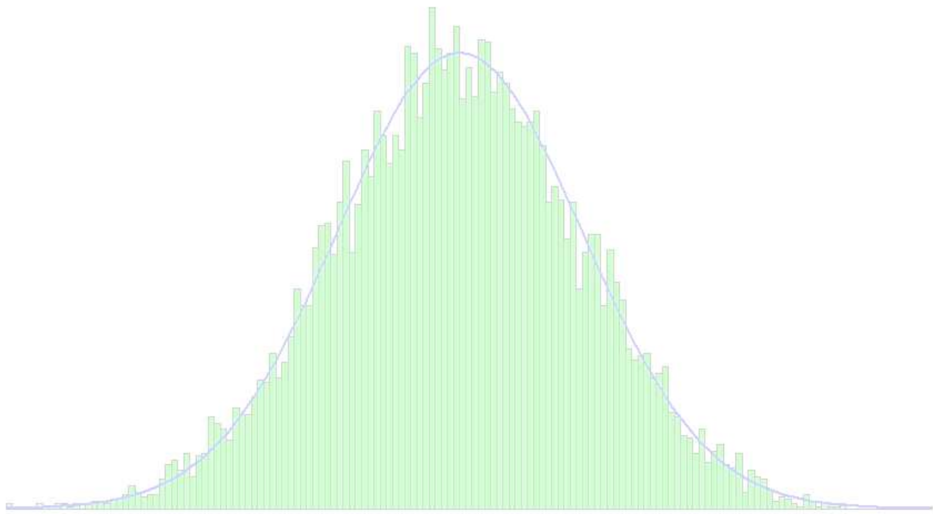
$$f(x)=\begin{cases} k(x+1) & ，\quad x=0,1,2,3 \\ 0 & ，\quad 其他 \end{cases}$$

請問：

（a）k 為何？

（b）求以下期望值 $E(X),E(X^2),E(3X-2),E(-2X+5)$ 及 $E(3)$。

（c）求以下變異數 $Var(X),Var(3X+2),Var(-3X+2)$ 和 $Var(5)$。



重點摘錄