第五章 機率

本章內容

5-1 機率導論

前一章我們討論了隨機實驗，也就是統計學對於資料產生過程的一種描述方式。在一個隨機實驗下，任何有意義的事件都有發生與不發生的可能。譬如，投擲一個銅板，結果可能為正面，也可能為反面；另種觀點就是正面可能會出現，亦有可能不會出現。如何描述一個事件出現可能性的大小呢？

通常我們使用機率一詞來代表某一事件發生的可能性，它是個數值，數值越大表示事件發生的可能性越高，越小就越不可能發生。習慣上，我們定義機率的最大值為 1，若一個事件發生的機率為 1，表示它必定發生。反之，當一個事件發生的機率為 0，表示它必不會發生。

然而，機率既然是表示一種發生的可能性，所以除了少數特殊的事件，絕大多數我們想要了解的事件，其發生的機率都介於 0 與 1 之間。如何用一個確定的機率數值去定義一個事件發生的可能性，其本質不就充滿著不確定性嗎？仔細想想其實存在一些吊詭。這個確定的數值是如何可以真實可知呢？充滿了很多問號。

所以，一般而言所謂事件機率，通常是人為賦予的測度，而非本然。通常有三種方法可以賦予一個事件發生的機率，分別為古典機率、相對機率與主觀機率。

5-1.1 古典機率

古典機率的認知上，樣本空間的每一個成員發生的機率相同。例如，投擲一個銅板，樣本空間的成員為正面與反面，所以兩者發生的機率各為 1/2；又如擲一

顆骰子，樣本空間為{1, 2, 3, 4, 5, 6}，骰子每一面出現的機率相同，皆為 1/6；從一副撲克牌抽出一張，任何一張被抽中的機率都是 1/52（不含鬼牌）。以上這些例子，古典機率提供機率測度值必須限制在樣本空間的成員是有限的。

古典機率測度

假設一個有限的樣本空間 S，於此樣本空間下的事件 E，其發生機率為 $P(E)$ 定義為

$$P(E)=\frac{\#(E)}{\#(S)}$$

其中 $\#(E)$ 與 $\#(S)$ 代表事件 E 與樣本空間 S 的個數。

例 5- 1

擲一顆骰子，樣本空間為 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，請問出現偶數 $E=\{2,4,6\}$ 的機率？

解：

$$P(E)=\frac{\#(E)}{\#(S)}=\frac{3}{6}=1/2$$

例 5- 2

從一副撲克牌抽出一張，請問

(1) 其為黑桃 E_1 的機率？

(2) 其為英文字母 E_2 的機率？

(3) 既是黑桃也是英文字母的機率？($E_1\cap E_2$)

解：

(1) 因為黑桃 E_1 有 13 張，所以 $P(E_1)=\frac{\#(E_1)}{\#(S)}=\frac{13}{52}=1/4$。

(2) 因為英文字母 E_2 有 16 張，所以 $P(E_2)=\frac{\#(E_2)}{\#(S)}=\frac{16}{52}=4/13$。

J, Q, K, A

(3) 共有 4 張既是黑桃也是英文字母，所以 $P(E_1\cap E_2)=\frac{\#(E_1\cap E_2)}{\#(S)}=\frac{4}{52}=1/13$。

例 5- 3

一個袋中有 5 顆紅球，10 顆白球和 6 顆黑球，今隨機抽出一顆，請問：

(1)抽中紅球的機率？

(2)不是黑球的機率？

解：

(1)$5/21$

(2)$1-6/21=4/7$

根據古典機率測度方法，認為銅板出現正面和反面的機率相同，而且和銅板無關。很顯然這種以先驗的方式，不證而認為為真的測度方法，存有很大的爭議。所以，我們考慮到如何由實務的觀察記錄，去建構一種表現 “可能性” 大小的測度，可以作為一個事件發生與否的量化指標。換言之，我們如何由一個真實的觀察結果，說明一個事件 A 比另一個事件發生 B 的可能性為高呢？就是看到事件 A 發生的次數比事件 B 的次數為多，則可論證之。此種衡量事件發生的可能性，建立在以次數為客觀事實的相對性比較上。

相關次數之機率測度

在有限性次數 N 的觀察中，若事件 A 發生的次數為 $\#(A)$，則事件 A 發生的機率為

$$P(A)=\frac{\#(A)}{N} \qquad \text{式 5- 1}$$

根據上述定義，若另一事件 B 發生的次數為 $\#(B)<\#(A)$，則若且唯若

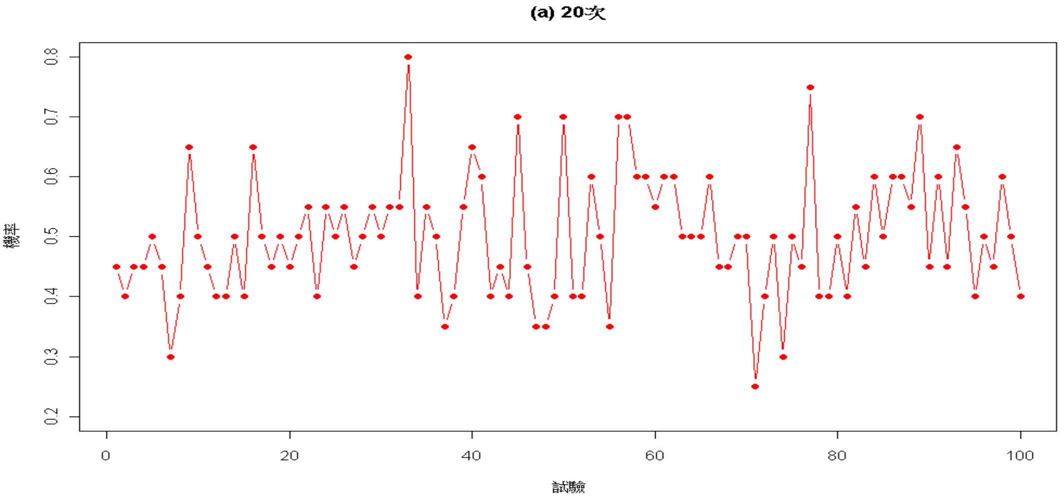
$$P(B)<P(A)$$

然而，以觀察結果的方式定義事件發生的機率，這使得機率值的決定本身就具有不確性。例如，我們投擲一個銅板 20 次，試驗兩次的紀錄如下：

試驗一：0 1 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1 1

試驗二：1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1 0 1 0 0 1 0 0 1

在試驗一，銅板出現正面的相對次數為 0.6，在試驗二，銅板出現正面的相對次數為 0.5。下圖(a)為每一試驗投擲 20 次銅板，連續試驗 100 次的機率測定值，顯示機率測定有很大的波動，此 100 次中的最大值接近 0.8，最小值接近 0.2。

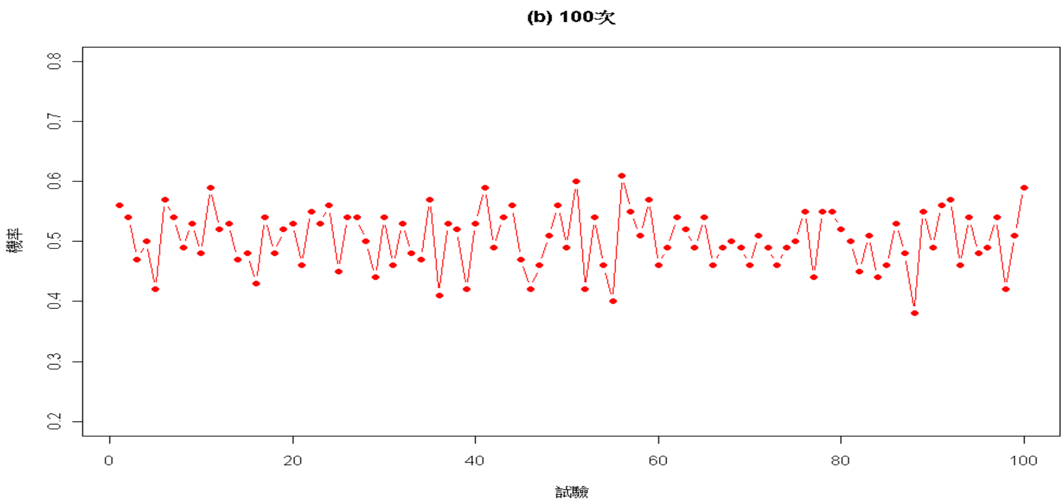


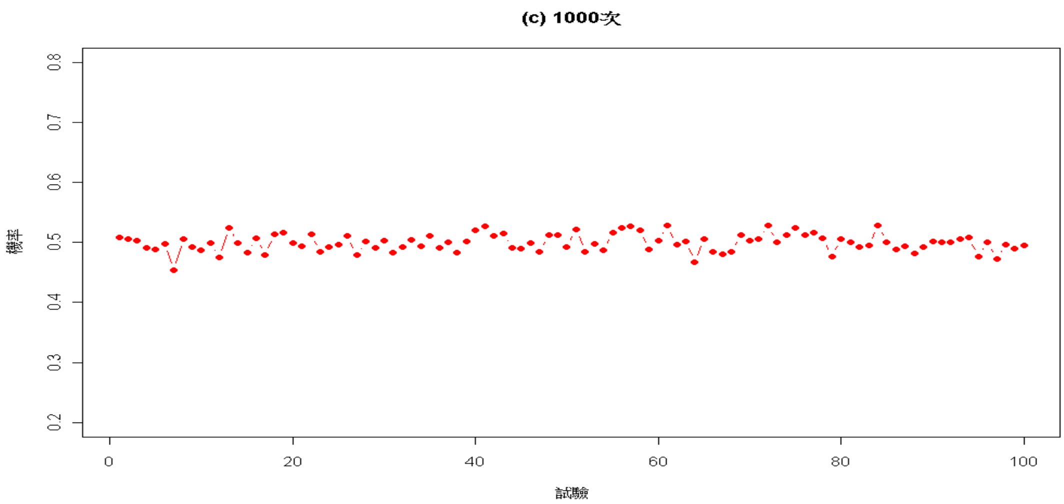
我們將每次試驗投擲的次數增加，圖(b)，(c)和(d)分別為 100 次，1000 次和 100000 次的結果。這些圖反應出一個現象，當投擲次數增加，機率測定的波動會變小，趨近一個穩定的數值。

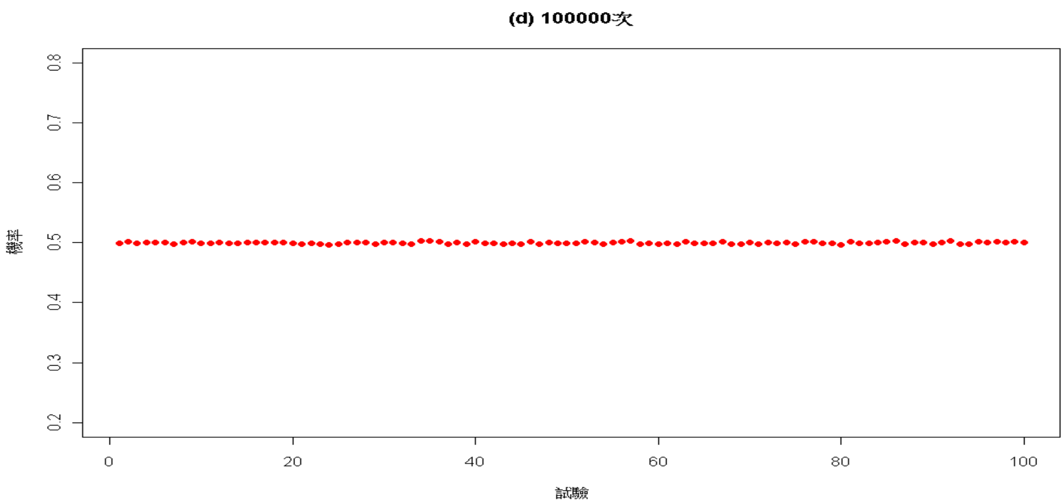
這裡顯示所謂統計模式的概念，每一次的觀察結果固然含有不確定性，讓我們無法確切掌握其必然性，然而，長期卻隱含著某種規律性。相對次數的機率測度就是追尋這種統計規律性的方法。上述銅板出現正面的機率趨於穩定的數值，這個數值就是在窮盡所有觀察後，我們看到出現正面的機率值，也就是一種極限值。

$$P(H) = \lim_{n \to \infty} \frac{\#(H)}{n} \qquad \text{式 5- 2}$$

H 代表出現銅板出現正面的事件，n 為投擲次數。







莊子云：『至大無外』。我們又如何能夠窮盡所有觀察呢？這是一件不可得的事，上列圖表都是利用電腦模擬投擲銅板的結果。歷史紀錄上，英國統計學家卡爾皮爾生曾記錄投擲銅板 24,000 次，結果正面有 12,012 次，正面比例為 0.5005。

(鄭惟厚譯/統計學的世界)。雖然，卡爾皮爾生的紀錄也不能算是窮盡所有觀察，但相對次數的機率測度提出這樣的看法，只要有足夠觀察值，我們就能對整體描繪出一個可以接受的輪廓，而且輪廓會越來越清晰。

主觀機率測度

主觀機率測度，故名就是非客觀的機率測度，相對於前兩者機率測度方法。所謂客觀者，也非全然是正確的機率測度。客觀者乃是由其機率測度的定義本身，提供一套可以檢驗的標準，在於可以被重複試驗以論證其觀點是否可以被接受。

而主觀機率測度通常沒有這種可重複試驗的機制存在。《重複性》是統計驗證上最為重要的工具，一個事件若僅有一次的觀察的機會，它的結果只有發生與不發生兩者，任何人在事件發生前，對事件發生的機率作論述，於事後都無法被檢驗，即使相對兩方有不同的看法，也無法經由結果說明何者正確。

譬如，『預測大聯盟的總冠軍球隊』，每個人或彩卷公司依其對資訊的判斷預測每一個球隊獲勝的機率，先天條件上讓我們都無法論證。特別對於個人，這些機率值通常反應我們對事件發生的信心程度而非客觀運用一些統計資料的判斷。

5-2 機率的性質

我們可以依據需要去測度一個事件發生的機率，然而，就這些測度本身應該遵循一些共同的原則。例如，投擲一個銅板的隨機實驗，其樣本空間為$S=\{H,T\}$，涵蓋這個實驗的所有可能結果。所以，

$$P(S)=1 \qquad \text{式 5- 3}$$

表示樣本空間發生的機率為 1，我們通常稱樣本空間為必然事件。因為樣本空間的餘事件為空集合，

$$\Phi = S^c$$

既然樣本空間是必然發生，所以空集合必然不發生，稱為不可能事件。即

$$P(\Phi)=0$$

雖然，口語上為了強調對一件事情的信心程度，有時有人會說：『百分之兩百』。

但機率測度上，一事件發生的機率是不可能超過樣本空間發生的機率，所以，對任意包含於樣本空間內的事件 $E \subset S$ ，其機率測度應為

$$0 \le P(E) \le P(S) = 1 \qquad \text{式 5- 4}$$

若 100 員工參加年終摸彩，獎項有一個兩個特獎、一個頭獎和 10 個小獎。根據古典機率測度，某人中特獎的機率為 2/100，中頭獎的機率為 1/100，中小獎的機率為 10/100。因為一個人最多只會中一個獎，此人中獎的機率為

2/100+1/100+10/100=13/100=13%

歸結上述討論，一個機率測度應該滿足以下三點基本性質：

1. 任意事件 $E \subset S$ ，滿足 $0 \le P(E) \le 1$ 。
2. $P(S) = 1$ 。
3. 任兩個互斥事件 E_1, E_2 ，$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

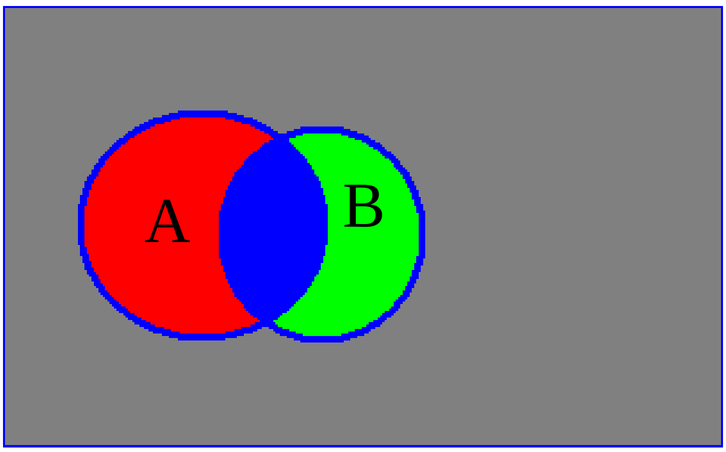
例 5- 4

假設洋基和道奇為美國聯盟與國家聯盟的冠軍隊，王曉明預測洋基拿下大聯盟總冠軍的機率為 0.7，杜添材預測洋基拿下大聯盟總冠軍的機率為 0.6。請問王曉明和杜添材預測道奇拿下大聯盟總冠軍的機率分別為何？

機率的加法法則

若事件 $A, B \subset S$ ，則

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



我們以圖形面積表現事件發生的機率，由下圖，事件 A 發生的機率等於紅色與藍色兩塊面積的和，

$$P(A)=\text{紅}+\text{藍}$$

事件 B 發生的機率等於綠色與藍色兩塊面積的和。

$$P(A)=\text{綠}+\text{藍}$$

機率 $P(A\cup B)$ 代表兩事件 A,B 之一發生的機率，其值可以分解成

$$P(A\cup B)=\text{紅}+\text{藍}+\text{綠}\text{。}$$

比較 $P(A\cup B)$ 和 $P(A)+P(B)$，後者藍色面積重複計算一次，藍色面積代表兩事件皆發生的機率，故於加法法則中，應予扣除以為等式成立。

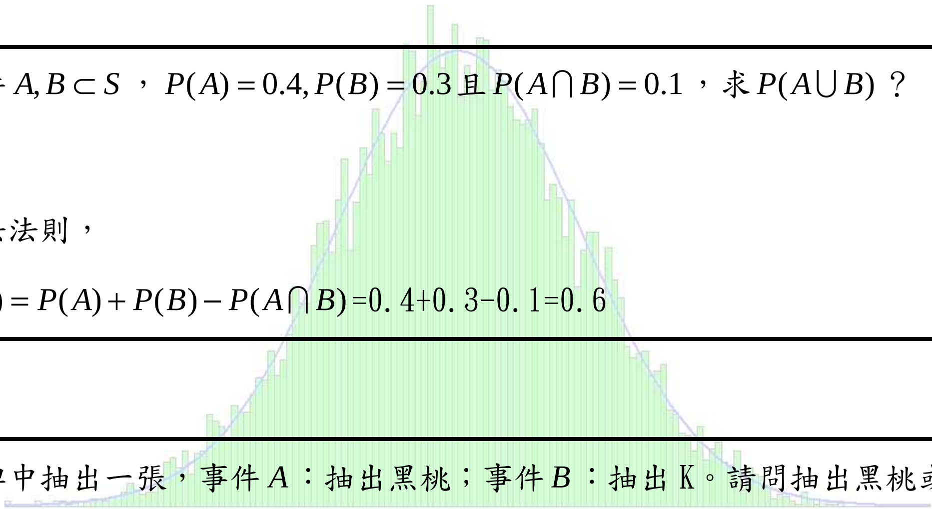
例 5- 5

假設事件 $A,B\subset S$，$P(A)=0.4, P(B)=0.3$ 且 $P(A\cap B)=0.1$，求 $P(A\cup B)$？

解：

根據加法法則，

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$=0.4+0.3-0.1=0.6



例 5- 6

從一副牌中抽出一張，事件 A：抽出黑桃；事件 B：抽出 K。請問抽出黑桃或 K 的機率為何？

解：

利用古典機率法，因為

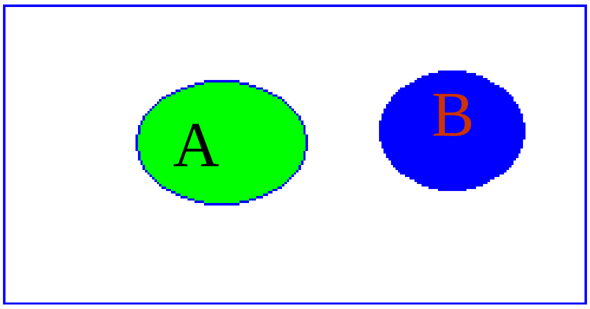
$P(A)=1/4,$
$P(B)=1/13,$
$P(A\cap B)=1/52$

所以，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=1/4+1/13-1/52=\dfrac{13+4-1}{52}=\dfrac{4}{13}$

假設 A,B 互斥，則 $P(A\cap B)=P(\Phi)=0$，所以

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B) \qquad \text{式 5- 5}$$

因為互斥，圖形上沒有重疊的部分，可以免除扣除的動作。



例 5- 7

假設一個工廠有三條生產線 A,B 和 C，其產量分占公司總產量的 30%，25%和 45%。今於市場上隨機抽出一個產品，請問抽中 A 或 B 生產線的產品的機率為何？

解：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.3 + 0.25 = 0.55$$

機率的餘事件法則

已知 $A \subset S$ ，則

$$P(A^c) = 1 - P(A) \qquad \text{式 5- 6}$$

因為 A 和它的餘事件 A^c 互斥，且 $A \cup A^c = S$ ，根據機率的基本性質與加法法則，我們可以得到

$$1 = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

例 5- 8

假設一個工廠有兩條生產線 A,B，已知 A 產量分占公司總產量的 45%，則 B 產量分占公司總產量的 55%

例 5- 9

若美國聯盟拿到 2009 的總冠軍的機率為 0.55，則國家聯盟拿到總冠軍的機率為 0.45。

5-3 條件機率與獨立事件

『條件』顧其名為限制也。條件機率(conditional probability)為限制在一些我們考慮的的特殊情況下，來探討另一種情況發生的機率，兩種情況在隨機實驗上都以事件的用語來描述之。前者為限制範圍，將原有的樣本空間討論範圍予以縮小。例如，民意調查中我們可能將原有研究對象為全體民眾，改為男生或是女生。關於學生滿意度調查，我們也可能將所有學生予以縮小僅是四技二年級的學生。

考慮以下這個簡單但很清楚的例子，假設我們投擲兩顆骰子，其樣本空間如下

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

令事件 A 代表第二顆骰子的點數為 1，如下所示。

A					
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

由古典機率的觀點，我們知

$$P(A) = \frac{6}{36}$$

令事件 B 兩個骰子點數和大於等於 7(≥ 7)，如下所示。

(1,6)
(2,5) (2,6)
(3,4) (3,5) (3,6)
(4,3) (4,4) (4,5) (4,6)
(5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6)
(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6)

且 $P(B)=\dfrac{21}{36}=\dfrac{7}{12}$ 。

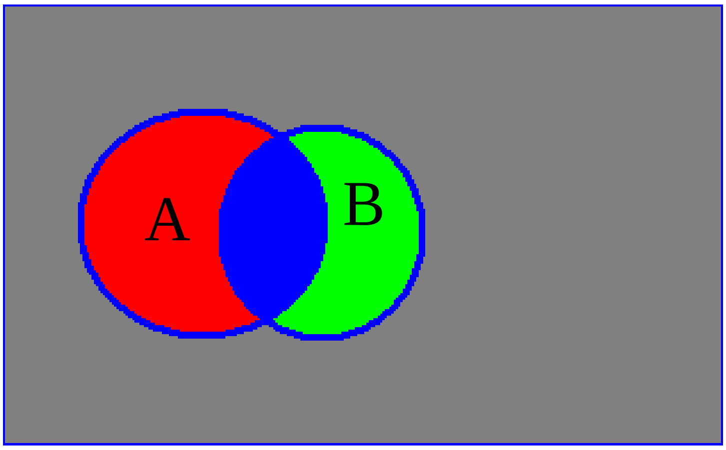
當我們在事件 B 的條件限制下，討論事件 A 發生的機率，即如下所示僅有 $(1,6)$ 這種結果會在事件 B 的條件之下發生。

(1,6)
(2,5) (2,6)
(3,4) (3,5) (3,6)
(4,3) (4,4) (4,5) (4,6)
(5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6)
$\boxed{\text{(6,1)}}$ (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6)

根據古典機率的測度方法，事件 B 共有 21 種可能，其中只有 1 種代表事件 A 發生。我們稱給定事件 B 的條件下，事件 A 發生的條件機率為 $1/21$ 。

條件機率

已知事件 B 發生的條件下，另一事件 A 發生的條件機率，記為
$P(A\|B)$ 　　式 5- 7



由上圖示意，在事件 B 的條件下，事件 A 僅剩藍色區塊，這個區塊為 $P(A\cap B)$，所以，條件機率的計算公式為

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad \text{式 5-8}$$

例 5- 10

假設本班有 50 位同學，女生 20 位和男生 30。其中有 8 位女生和 15 位男生打工。令事件 A 為女生，事件 B 為打工。今隨機抽出一人，請回答以下問題：

(1)此人為女生的機率？

(2)此人有打工的機率？

(3)此人為打工女生的機率？

(4)已知此人為女生，其有打工的機率？

(5)已知此人有打工，其為女生的機率？

解：

(1) $P(A)=\frac{20}{50}=0.4$

(2) $P(B)=\frac{8+15}{50}=0.46$

(3) $P(A\cap B)=\frac{8}{50}=0.16$

(4) $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.16}{0.40}=0.4=\frac{8}{20}$

(5) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.16}{0.46}=\frac{8}{23}$

注意：$P(B|A) \neq P(A|B)$

機率的乘法法則

根據條件機率的計算公式

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

我們可以得到計算兩事件交集機率的乘法公式

$$P(A\cap B)=P(A|B)\times P(B)=P(B|A)\times P(A) \qquad \text{式 5- 9}$$

例 5- 11

隨機從一副牌中抽出兩張(不放回)，令事件 A 代表第一張為黑桃事件，事件 B 代表第二張為黑桃事件。

因為黑桃為 52 張牌中的 13 張，所以，$P(A)=\frac{1}{4}$。另外，事件 $A\cap B$ 代表兩張都是黑桃的事件，利用組合公式可得

$$P(A\cap B)=\frac{C_2^{13}}{C_2^{52}}=\frac{13\times 12}{52\times 51}=\frac{1}{17}$$

所以，已知第一張為黑桃的條件下，第二張也是黑桃的條件機率為

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/17}{1/4}=\frac{4}{17}<\frac{1}{4}$$

此表示，當第一張為黑桃的條件下，剩下 51 張牌中僅有 12 張黑桃，所以再抽中黑桃的機率會下降。

例 5- 12

一個工廠有條生產線，其產量分布情形如下表。

	良品	不良品	合計
A 生產線	1030	70	1100
B 生產線	810	90	900
合計	1840	160	200

請隨機抽出一個，請問

(1) 來自 A 生產線的機率？

(2) 若已經其為不良品，請問該產品來自 B 生產線的機率？

例 5- 13

假設本校女生的比例為 0.45，在女生中有 20%住在外縣市。請問隨機抽出一人，其為女生且住外縣市的比例為何？

解：

令事件 A 為女生，事件 B 為住外縣市。根據題意

$$P(A)=0.45\text{，}P(B\,|\,A)=0.2$$

所以，

$$P(A\cap B)=P(B\,|\,A)\times P(A)=0.2\times 0.45=0.09=9\%$$

獨立事件(independent events)

『獨立』乃指兩著互不影響，『獨立事件』指兩個事件發生與否互不影響。更明確地說，兩個事件 A,B 限制其中任一個事件發生下，都不改變另一事件發生的機率。所以，我們由條件機率定義兩個事件是否獨立。

兩個事件 A,B 相互獨立，若且維若

$$P(A\,|\,B)=P(A) \text{ 或 } P(B\,|\,A)=P(B)$$

倘若兩事件不是相互獨立，則稱為相依事件(dependent events)

觀念

『**獨立**』與『**互斥**』這兩個定義常常被混淆，我們有以下幾點說明：

1. 獨立事件討論兩個事件發生的關聯性，用事件發生的機率來描述事件間的性質；互斥事件則是比較兩事件內的元素(elements)來描述兩事件的關係。

2. 雖然兩個名詞定義的基礎不同，但由於兩事件『互斥』，使得兩事件必定不可能同時發生，也就使得兩事件發生與否產生了『對立性』。互為對立

的兩方，就是相互依存的兩方，不可能是獨立事件。倘若事件 A 發生，事件 B 必然不發生；或者事件 B 發生，事件 A 必然不發生，換言之，事件 A, B 是否發生產生了關聯。

3. 簡易言之，互斥事件(除了空集合外)必定是相依事件。

例 5- 14

已知 A,B,C 三事件發生的機率為 $P(A)=0.4, P(B)=0.3, P(C)=0.2$，且兩事件交集的機率

$$P(A\bigcap B)=0.1$$
$$P(A\bigcap C)=0.08$$
$$P(B\bigcap C)=0$$

請問：

(1) A,B 獨立或相依。

(2) A,C 獨立或相依。

(3) B,C 獨立或相依。

例 5- 15

隨機投擲兩顆骰子，請探討以下四個事件的關係

事件 A 為兩個骰子點數和為 8

事件 B 為其中有一顆骰子為 3

事件 C 為兩顆骰子點數和為 7

事件 D 為第一顆骰子點數為 4

$A=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

$B=\{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(6,3),(5,3),(4,3),(2,3),(1,3)\}$

$C=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

$D=\{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\}$

$A\bigcap B=\{(3,5),(5,3)\}, A\bigcap C=\Phi, A\bigcap D=\{(4,4)\}$
$B\bigcap C=\{(4,3),(3,4)\}, B\bigcap D=\{(4,3)\}, C\bigcap D=\{(4,3)\}$

依古典機率測度得知

$$P(A)=\frac{5}{36}, P(B)=\frac{11}{36}, P(C)=P(D)=\frac{1}{6}$$

$$P(A\cap B)=P(B\cap C)=\frac{1}{18}, P(A\cap C)=0,$$

$$P(A\cap D)=P(B\cap D)=P(C\cap D)=\frac{1}{36}$$

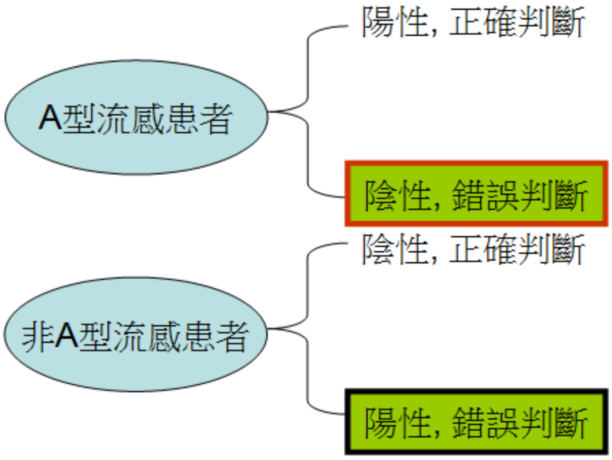
因為 $P(C\cap D)=P(C)\times P(D)$，所以，事件 C,D 為獨立事件。

5-4 貝氏定理（Bayes' Theroem）

2009 年 H1N1 新流感全球流行，A 型流感快速篩檢是除了醫生臨床判定外，初步篩選病患是否是 H1N1 流感的患者主要工具。報載快篩的正確率為 6 成左右，其意是一個 A 型流感病患，快篩顯示陽性的機率值，相對約有 4 成 A 型流感病患快篩顯示為陰性。然而，檢驗的誤判有兩種情形，除了上述之外，也有可能如下圖所示，因檢驗結果為陽性，而將非 A 型流感患者而誤判成 A 型流感患者。

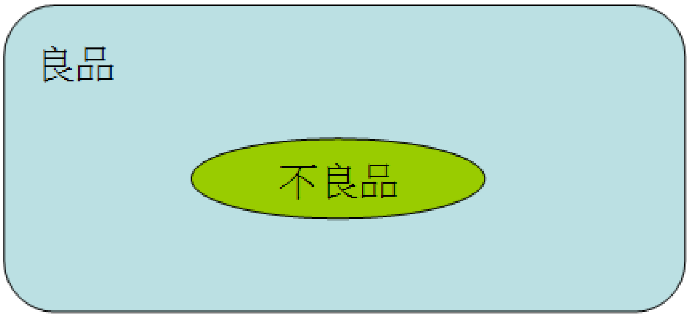
在治療上的資訊，檢驗結果是重要的參考。一個病患是否為非 A 型流感患者或 A 型流感患者，需要進一步實驗分析才能判斷。所以，就檢驗結果而論，我們必須關心以下的問題：

1. 就一個檢驗結果為陽性的患者，其確為 A 型流感患者的機率為何？
2. 就一個檢驗結果為陰性的患者，其確不為 A 型流感患者的機率為何？



除此之外，工廠的品管人員檢驗產品是否為良品或不良品也有相關的問題，

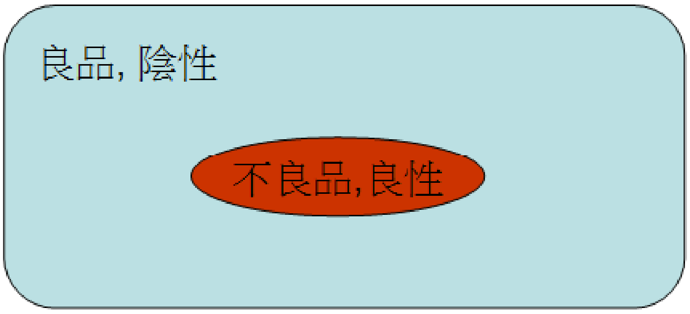
都有可能將良品誤判為不良品或不良品誤判為良品的情形發生。一個工廠的產品依其功能性可以分成兩群，如下圖所示。



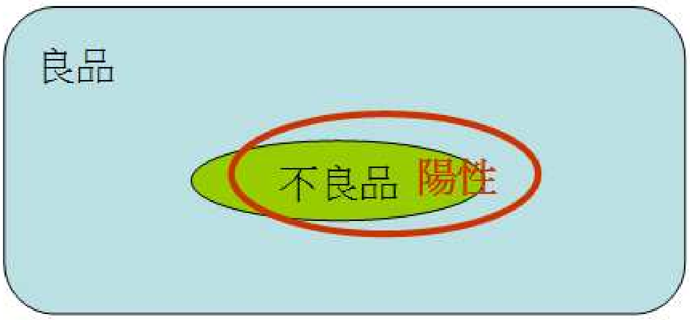
檢驗的過程就是對工廠的產品分類的一個過程，將工廠的產品依檢驗結果分成一群為檢驗陽性(不良品)和一群檢驗為陰性(良品)。一個完美的檢驗就是

檢驗陽性=不良品

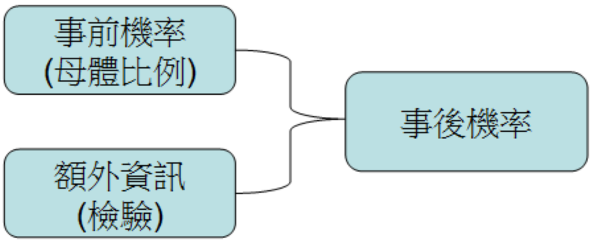
檢驗陰性=良品



然而，通常檢驗結果與實際會有出入，如下圖所示：



由上圖，我們可以看出在檢驗結果為陽性的產品中，其不良品的比例比原先沒有檢驗前，整個工廠的不良率為高，在陰性反應的產品中，其不良品的比例則是下降了。這裡反應，檢驗結果的分類有助於我們對產品性質(良品，不良品)的歸類正確率。



貝氏定理的核心意義如何結合現有資訊與新增資訊，影響決策的判斷。以上述為例，沒有檢驗之前，一個產品是否為不良品，其機率就是母體比例(不良品產品占全體的比例)，檢驗結果就是一種新增資訊，統計的觀念上，當有意義的資訊增加了，必定能增加我們判斷的正確率。檢驗前，母體比例為事前機率 (prior probability)，根據檢驗結果重新計算產品為良品或不良品的機率稱為事後機率 (posterior probability)。

假設事件 A 代表良品，事件 B 代表檢驗結果為陽性。相對而言，事件 A^c 代表不良品，事件 B^c 代表檢驗結果為陰性。我們的事前機率為

$$P(A) \text{ 和 } P(A^c) = 1 - P(A) \text{ 。}$$

我們要關心的是根據檢驗結果而得的事後機率

$$P(A|B) = ?$$

根據條件機率的公式和乘法法則，我們可得

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \qquad \text{式 5- 10}$$

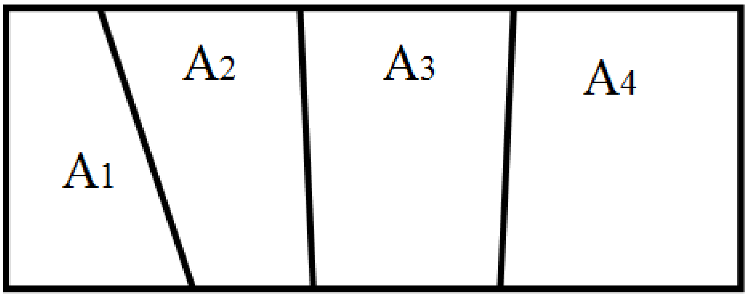
其中 $P(B|A)$ 代表一個良品被檢驗為陽性的機率，所以檢驗結果，提供的額外資的判斷資訊。

樣本空間的分割

假設 n 個包含於樣本空間 S 的事件，$A_i, i = 1, 2, \cdots, n$ ，滿足以下兩點性質：
(1)任意兩事件皆為互斥事件，即 $A_i \cap A_j = \Phi, i \neq j$
(2)聯集後為樣本空間，即 $S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

我們稱 $A_i, i=1,2,\cdots,n$ 為樣本空間 S 的分割。

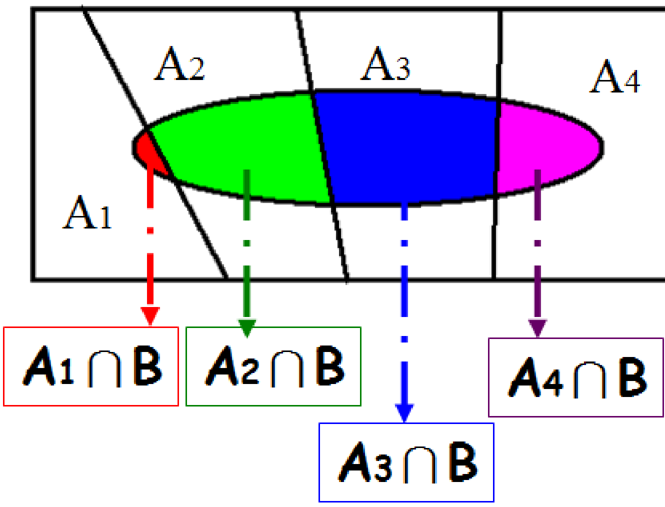
概念上就是這些事件都沒有重疊的部分，而合併後又可以代表全體樣本空間，就稱為這些事件構成樣本空間的分割。就像拼圖遊戲一樣，每一塊不同的 puzzle 組合成一張完整的圖案。如下圖，事件 A_1, A_2, A_3, A_4 成為樣本空間的分割。



若事件 B 是此樣本空間的任意一個事件，則 A_1, A_2, A_3, A_4 的分割，同樣也會對事件 B 產生分割作用，如下圖所示。事件 B 可以分成

$$B \cap A_1, B \cap A_2, B \cap A_3, B \cap A_4$$

四塊互斥的集合，合併後為完整的事件 B。



根據互斥事件的加法法則，我們可得

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + P(B \cap A_4)$$

根據乘法法則，上式可改寫成

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) + P(B|A_4)P(A_4)$$

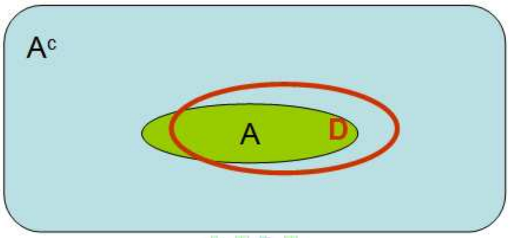
將上式結果一般化，若 $A_i, i=1,2,\cdots,n$ 為樣本空間 S 的分割，則

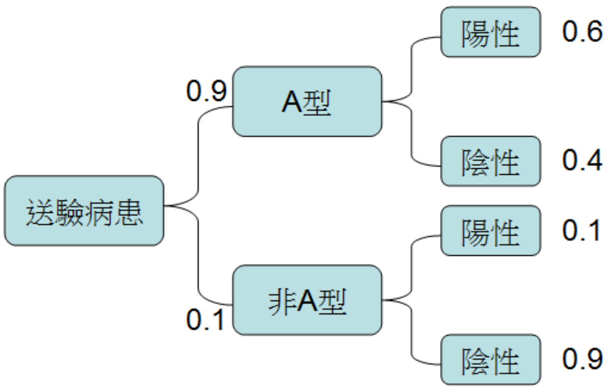
$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\mid A_i)P(A_i) \qquad \text{式 5- 11}$$

例 5- 16

假設 A 型流感患者快篩檢驗為陽性的比例為 0.6, ，非 A 型流感患者快篩檢驗為陽性的機率為 0.1。某位醫生依其臨床判斷決定一個病患是否該接受 A 型流感快篩檢驗，其送驗病患中有 9 成是 A 型流感患者，請問檢驗結果為陽性的比例為何？

空間分割示意圖





令事件 A 代表該醫生送驗中的 A 型流感患者，事件 D 為檢驗陽性反應的送驗患者。根據題意， $P(A)=0.9, P(D\mid A)=0.6, P(D\mid A^c)=0.1$ 。因為事件 A 與其餘事件 A^c 為一個樣本空間分割，所以

$$\begin{aligned}P(D)&=P(D\cap A)+P(D\cap A^c)\\&=P(D\mid A)P(A)+P(D\mid A^c)P(A^c)\\&=0.6\times0.9+0.1\times0.1=0.55\end{aligned}$$

例 5- 17

接續上題，請問檢驗結果為陽性反應者，是 A 型流感患者的比例。又檢驗結果為陰性，是 A 型流感患者的比例。

解：

$$P(A|D)=\frac{P(D|A)P(A)}{P(D)}=\frac{0.6\times0.9}{0.55}=\frac{54}{55}$$

這意謂檢驗結果為陽性者，其為 A 型流感患者的機會為 54/55。

因為 $P(D^c)=1-P(D)=0.45$

$$P(A|D^c)=\frac{P(D^c|A)P(A)}{P(D^c)}=\frac{0.4\times0.9}{0.45}=\frac{36}{45}=0.8$$

這意謂檢驗結果為陰性者，仍有高達 8 成的機率為 A 型流感患者。

例 5- 18

接續上題，假設另一位醫生送驗病患中有 7 成是 A 型流感，請問檢驗後的事後機率？

解：

$$P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap A^c)$$
$$=P(D|A)P(A)+P(D|A^c)P(A^c)$$
$$=0.6\times0.7+0.1\times0.3=0.45$$
$$P(A|D)=\frac{P(D|A)P(A)}{P(D)}=\frac{0.6\times0.7}{0.45}=\frac{42}{45}=\frac{14}{15}$$

這意謂檢驗結果為陽性者，其為 A 型流感患者的機會為 14/15。

因為 $P(D^c)=1-P(D)=0.55$

$$P(A|D^c)=\frac{P(D^c|A)P(A)}{P(D^c)}=\frac{0.4\times0.7}{0.55}=\frac{28}{55}$$

這意謂檢驗結果為陰性者，28/55 的機率為 A 型流感患者。

例 5- 19

某工廠有四條生產線 A_1,A_2,A_3,A_4，其產量與不良率如下表：

生產線	產量比	不良率
A_1	20%	2%
A_2	40%	3%
A_3	30%	4%

A_4	10%	1%

(1)請問此工廠產品的不良率為何?

(2)已知產品為不良品，其來自 A_1, A_2, A_3, A_4 的機率分別為何？

解：

令 B 為不良品事件，其機率為

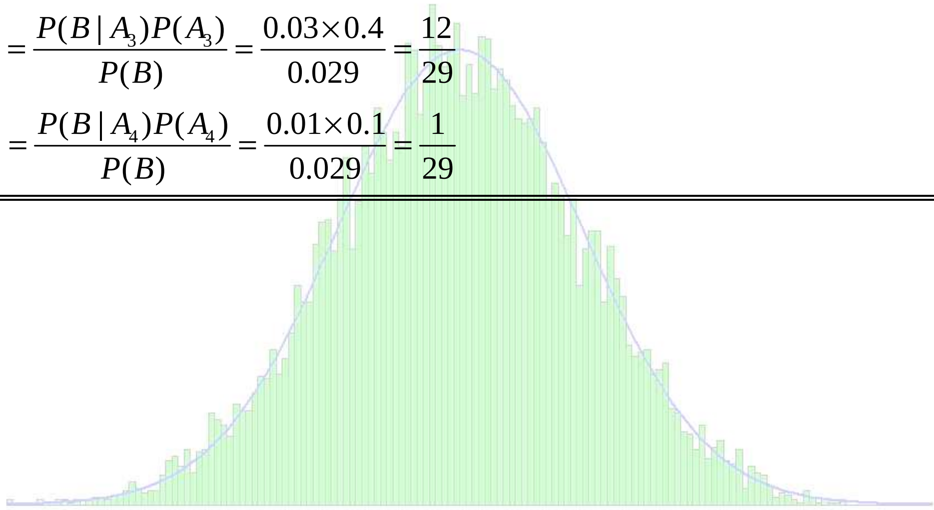
$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) + P(B|A_4)P(A_4) \\
&= 0.02 \times 0.2 + 0.03 \times 0.4 + 0.04 \times 0.3 + 0.01 \times 0.1 \\
&= 0.004 + 0.012 + 0.012 + 0.001 = 0.029
\end{aligned}
$$

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} = \frac{0.02 \times 0.2}{0.029} = \frac{4}{29}$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)} = \frac{0.03 \times 0.4}{0.029} = \frac{12}{29}$$

$$P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B)} = \frac{0.03 \times 0.4}{0.029} = \frac{12}{29}$$

$$P(A_4|B) = \frac{P(B|A_4)P(A_4)}{P(B)} = \frac{0.01 \times 0.1}{0.029} = \frac{1}{29}$$



習　題

1. 假設 A，B 二事件為任意事件，P (A)=1/2，P (B)=1/4，P (A∪B)=5/8，則 A，B 同時發生之機率為何？
2. 同上題，若 A，B 為互斥事件，則 P (A∪B)為何？
3. 同上題，若 A，B 為任意事件，且 P (A∩B)=1/12，則 P (A∪B)為何？
4. 設 A、B 二事件為獨立事件，P(A)=0.3，P(B)=0.5，則 A、B 事件同時發生之機率為何？
5. 假設 A、B 二事件屬同一個樣本空間，P(A)=0.3，P(B)=0.5，P(A∩B)=0.1，則 $P(A^c \cap B^c)$ 為何？
6. 設 A、B 兩事件為獨立事，P(A)=0.5，P(B)=0.3，則 A 發生後 B 再發生之機率為何？
7. 假設 A、B 為互斥事件，P(A)=0.3，P(B)=0.55 求 $P(A^c \cap B^c)$ 為何？
8. 假設 A、B 為互斥事件，P(A)=0.3，P(B)=0.55 求 $P(A^c \cup B)$ 為何？
9. 假設 A、B、C 為獨立事件，P(A)=0.3，P(B)=0.25，P(C)=0.35；求 $P(A \cup B \cup C)$？
10. 假設 A、B、C 互為互斥事件，P(A)=0.15，P(B)=0.3，P(C)=0.35 求 $P(A \cap B \cup C^c)$？
11. 若 A，B 為任意事件，P(A)=1/2，P(B)=1/4，P(A∩B)=1/8，試求 A、B 至少有一事件發生的機率？
12. 若 A、B 為任意事件，且 P(A)=0.6，P(B)=0.7，$P(A \cap B)$=0.4，則 $P(A \cup B)$ 為何？
13. 擲二骰子一次，其出現合為 5 點之機率為何？
14. 某貧血病人，其復原機率為 0.4，若 5 人患此病，求恰有 2 人復原的機率？
15. 同上題，求 1 至 3 人復原的機率？
16. 一批中有合格品 10 件，重工品 5 件，隨機從中抽取 5 件，則恰有 1 件重工品之機率？。
17. 自一付撲克牌中抽取 2 張牌，若第一張牌為 5，且第二張牌為介 2~5 之點數牌，則此機率為何？

18. 投擲 50 元錢幣四次，求其中至少有 1 次出現 50 元字樣之機率？

19. 8 台電腦中有 3 台故障，經隨機抽樣，每次抽取一台取後不放回，連續取 3 部，則第一台合格好，第二台故障，第三台故障之機率？

20. 已知 20 個球中，有 15 個白球，5 個紅球；每次抽取一個，取後放回；則隨機抽取 6 個球，恰有 2 個白球之機率為何？

21. 已知 $P(A)=0.4, P(B)=0.6, P(A\cap B)=0.3$，請問

(1) $P(A^c)$

(2) $P(A\cup B)$

(3) $P(A|B)$）

(4) $P(A^c\cap B)$

(5) $P(A\cap B^c)$

22. 袋中有五個球編號 1, 2, 3, 4, 5，抽出兩個球，請計算

(1) 奇數偶數各一的機率

(2) 假設其中一球為奇數，另一球亦為奇數的機率。

23. 若 A、B 分別為一樣本空間之兩事件，且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.3$，$P(A\cap B)=0.3$，試求 $P(A\cup B)$、$P(A\cap B^c)$ 及 $P(A^c\cap B^c)$＝？

24. 假設袋中有紅、白、藍三種不同顏色的球。今隨機抽取二顆球，一次抽取一顆，取出後不放回。令 A 代表第一顆球為紅球的事件，B 代表第二顆球為藍球的事件，C 代表第二顆球為紅球的事件，試問 $P(A)$、$P(B)$、$P(C)$、$P(A|B)$、$P(B|A)$、$P(C|A)$＝？

25. 本校職員有 150 人，其姓別及婚姻狀況之列聯表如下：

婚姻狀況 / 性別	已婚	未婚
男	60 人	25 人
女	45 人	10 人

今隨機抽出一位職員作問卷調查，試問，

（1）為男職員的機率為何？

（2）為男職員且已婚者的機率為何？

（3）已知為女職員，其為已婚者的機率為何？

（4）已知為已婚職員，其為男性的機率為何？

26. 假設某製造廠生產 A、B 兩產品，已知 A、B 兩種產品分別占總產品數的 60%及 40%，且 A 產品的不良率為 0.02，B 產品的不良率為 0.05。試問，

（1）該製造廠生產出不良品的機率為何？

（2）該製造廠生產出的不良品中，A 產品的比例為何？

（3）該製造廠生產出的不良品中，B 產品的比例為何？

27. 某一工廠共有三條生產線，A 生產線的產量占 35%，其不良品的比例是 1.5%，B 生產線的產量占 25%，其不良品比例為 1.2 %，C 生產線的產量占 40%，其不良品的比例是 1.0%。

（1）請問此一工廠的產品不良率為多少？

（2）已知一產品為不良品，請問其為 A，B，C 生產線所生產的機率各是多少？

重點摘錄