第四章 集合論

本章內容

統計學是利用樣本數據去論斷母體分配，這樣的推論是經由一些樣本數據的特性分析所歸納的結果。在理則學有一個命題，

“若 p 則 q 非 q 則非 p”

舉例而言，假如下雨(p)則地濕(q)，若沒有地濕(q)則沒有下雨(p)。在此例中地濕與否，代表我們觀察的情形，是一種樣本數據；下雨與否則是母體，或是代表母體的特性參數。我們姑且相信下雨必定會地濕，但地濕不必然會是下雨造成，有很多因素都有可能造成地濕。假設，這個世界上只有兩種因素，下雨或是有人潑水才會造成地濕，而且我們也知道這兩種因素造成地濕的樣態，這樣我們就可以由這些地濕的樣態去辨識是否下雨。(當然，氣象學對下雨與否和下雨的程度有專業的定義，這裡只是借用此例，討論統計學思辨的過程)

再舉一例，我們問賭客所用的銅板否是公平的？嚴格來說，我們無從得知。公平一詞非常抽象，概念上骰子出現任何一面的機會相同，是不是有限次的投擲中，正反面的出現次數恰好相同，但真實上卻無法期待會果真如此。甚至像擲奇數次這種實驗，恰好相同的論述是永不可能發生的。

現在我們把問題簡化，假設銅板就只有兩種可能，一為公平，另一為不公平出現正面的機會 70%大於反面的機會。連續投擲此銅板 10 次，出現以下的結果

正正反正反正正正正反反反正正正

其中正面出現 10 次，反面出現 5 次。我們如何利用這組資料推論這枚銅板是否公平呢？在統計學的邏輯上，我們通常問 “如果銅板是公平的，出現這樣的次數分配可能性有多高；又銅板不是公平，出現這樣的次數分配可能性有多高？” 如果

公平的銅板出現上述結果的機會，高於不公平的銅板，我們就推論銅板是公平。所以，統計推論事實上是一種 “可能性(likelihood)” 的推論，做所有可能的參數中，根據數據論斷最可能的一個。

4-1 隨機實驗 (Random Experiments)

資料的獲得包含有實驗、觀察和調查等等方法，統計學上認知到這些獲得這些資料的過程具有不確定性，其意謂若可重複進行相同的實驗或再次進行觀察，所紀錄的資料可能不同。換言之，我們利用樣本資料描述整體樣貌，只是眾多可能描述方法之一。我們舉一個簡單的例子，假設一個群體只有 5 個人，他們的身高分別為

$$x_1=169,\quad x_2=170,\quad x_3=171,\quad x_4=176,\quad x_5=164$$

他們的平均值為 μ=170。我們從中任選兩個人，計算樣本平均值一共有下列 10 種可能的選法，9 種可能的計算結果。然而，實際上我們會看到下列之一，也不知道其他可能結果。

結果	樣本平均值	結果	樣本平均值
$x_1=169,\ x_2=170$	169.5	$x_2=170,\ x_4=176$	173.0
$x_1=169,\ x_3=171,$	170.0	$x_2=170,\ x_5=164$	167.0
$x_1=169,\ x_4=176$	172.5	$x_3=171,\ x_4=176$	173.5
$x_1=169,\ x_5=164$	166.5	$x_3=171,\ x_5=164$	167.5
$x_2=170,\ x_3=171$	170.5	$x_4=176,\ x_5=164$	170.0

因為資料的獲得具有不確定性，我們稱這個獲得的過程為隨機實驗，具有以下幾點特性；

(1) 實驗前，我們知道所有可能發生的結果，但無法知道會產生何種結果。

(2) 實驗後，可以確定發生的結果，而且結果是唯一的。

(3) 可以重複進行此一實驗。

例如，上例中母體有 5 個人，我們隨機抽出兩個人，在實驗前我們確知會有 10 種可能的結果，實驗後只右一種結果會出現，而且我們可以得到測量數據，而這樣的實驗是可以重複進行的。

例 4- 1

請舉一些隨機實驗的例子：

(1) 隨機從剛出廠的電燈泡群中抽取 3 顆電燈泡，每一燈泡分類為：亮（良好）；不亮（損壞），並檢驗其損壞的個數。

(2) 投擲一公平的骰子，觀察其面朝上之點數。

(3) 紀錄由 1 號至 5 號的田徑選手，跑完百米競賽後的名次序。

一個隨機實驗之所可能產生的結果（outcome），所構成之集合稱為此實驗的樣本空間(sample space)，習慣上用大寫英文 S 表示之。而樣本空間的部分集合(subset)稱為事件，倘若一事件內只含有一種可能結果，稱此事件為簡單事件（simple event）；若一事件含有多個可能結果，稱此事件為複合事件（compound event）。

例 4- 2

隨機從剛出廠的電燈泡群中抽取 3 顆電燈泡，檢驗燈泡是否正常。

亮（良好，G）；不亮（損壞，B）

樣本空間為 S={GGG，GGB，GBB，GBG，BGG，BGB，BBG，BBB}

例 4- 3

(1) 投擲一公平的骰子，觀察其面朝上之點數。

樣本空間為 S={1, 2, 3, 4, 5, 6}

(2) 投擲兩公平的骰子，觀察其面朝上之點數。

樣本空間為 $S=\{(i,j)\,|\,i=1,2,3,4,5,6;\ j=1,2,3,4,5,6\}$ 共有 36 種可能結果。

(3) 紀錄由 1 號至 5 號的田徑選手，跑完百米競賽後的名次序

S={12345, 12354, 12435, 12453, 12534, …}共有 120 種可能

例 4- 4

投擲兩公平的骰子，觀察其面朝上之點數。令集合 A 代表合為 36 的事件，集合 B 代表合為 8 的事件。

$A=\{(6,6)\}$

$B=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

事件 A 只有一個元素，稱 A 為簡單事件；事件 B 有 5 個元素，稱 B 為複合事件。

例 4- 5

投擲骰子的樣本空間為 S={1, 2, 3, 4, 5, 6}，所有可能事件為

{1}, {2}, …, {6}, {1, 2}, {2, 3}, …, {1, 2, 3, 4, 5, 6}, Φ 共有 $2^6=64$ 種

其中 $\Phi=\{\}$ 為空集合事件。

注意：樣本空間的部分集合包含空集合與樣本空間本身。

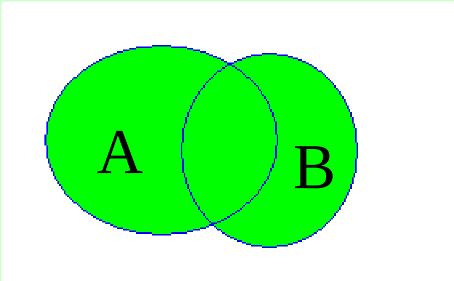
4-2 集合運算

集合的基本運算子包含聯集，交集與餘集三個作用。在一個給定的樣本空間下，聯集的作用是將兩個集合內的元素全部放入，交集的作用是兩個集合的比較，將兩個集合都有元素找出來，餘集是一種排除作用，將一個集合內的元素排除於整體(樣本空間之外)。以下我們分別定義其數學運算。

聯集 “$\cup$”

兩個事件 A, B 的聯集 $A\cup B$ 為一個集合，其定義在給定樣本空間下包含 A, B 兩集合的最小集合，即將出現在 A 或 B 的成員放在一起所構成的一個集合，如下圖綠色

部分。



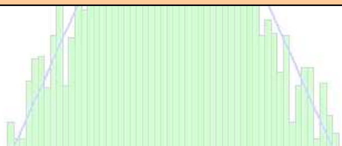
例 4- 6

投擲骰子的樣本空間為 S={1, 2, 3, 4, 5, 6}, 令 $A=\{1,2,3\}$ 為小於或等於 3 的事件, $B=\{2,4,6\}$ 為偶數事件, $C=\{1,3,5\}$ 為奇數事件。

$$A\bigcup B=\{1,2,3,4,6\}$$

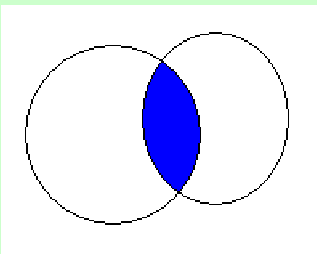
$$A\bigcup C=\{1,2,3,5\}$$

$$B\bigcup C=\{1,2,3,4,5,6\}=S$$



交集 "$\bigcap$"

兩個事件 A, B 的交集 $A\bigcap B$ 為一個集合，其定義在給定樣本空間下將 A,B 兩集合的內共同的成員挑選出來，即將找一個最大的集合包含於 A，也包含於 B, 如下圖藍色部分。



例 4- 7

投擲骰子的樣本空間為 S={1, 2, 3, 4, 5, 6}, 令 $A=\{1,2,3\}$ 為小於或等於 3 的事件, $B=\{2,4,6\}$ 為偶數事件, $C=\{1,3,5\}$ 為奇數事件。

$$A\bigcap B=\{2\}$$

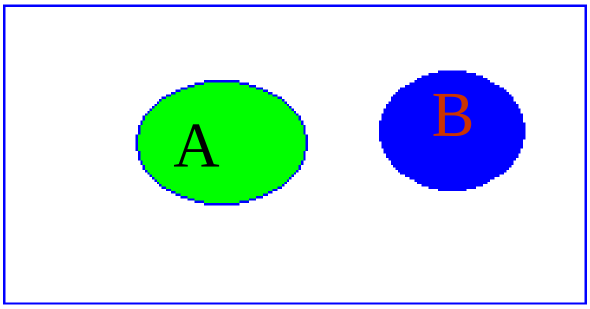
$$A \cap C = \{1,3\}$$

$$B \cap C = \Phi$$

定義：

兩個集合沒有共同的成員稱為互斥(mutually exclusive)，沒有共同成員即交集為空集合。若兩個事件 A, B 互斥，若且唯若

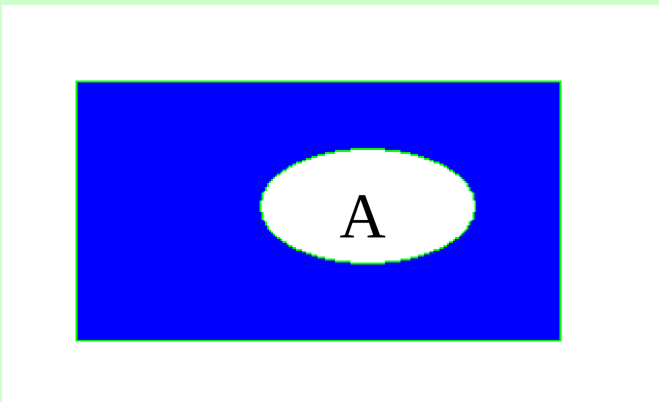
$$A \cap B = \Phi$$



例 4- 8

接續上例，因為 $B \cap C = \Phi$，所以 $B = \{2,4,6\}$ 和 $C = \{1,3,5\}$ 為互斥事件。

A 餘事件記為 A^c，定義為給定樣本一個樣本空間 S，任意一個包含於 S 的事件 A 的餘事件為 S 扣除 A 的成員後剩下的成員構成的集合。



例如，投擲骰子的樣本空間為 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，集合 $A = \{1,2,3\}$，則 $A^c = \{4,5,6\}$。

代數性質

(1) 交換律

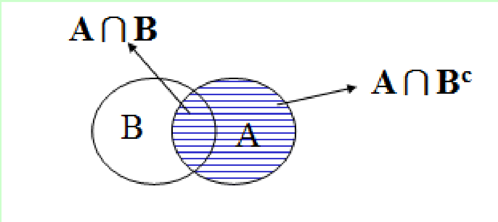
$$A \cap B = B \cap A,\ A \cup B = B \cup A \quad \text{式 4- 1}$$

(2) 分配律

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned} \quad \text{式 4- 2}$$

(3) 事件分割：任一事件 A 可被另一事件 B 分割成兩個互斥事件 (mutually events)，一部分屬於 B ($A \cap B$)，另一部分不屬於 B ($A \cap B^c$)。

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$



例 4- 9

假設一個隨機實驗的樣本空間為 $S = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$，事件

$A = \{a,b,c,d\}, B = \{b,d,f\}$，則

$A^c = \{e,f,g,h\}, B^c = \{a,c,e,g,h\}$
$A \cap B = \{b,d\}$
$A \cap B^c = \{a,c\}$

狄摩根定理

$$\begin{aligned} A^c \cap B^c &= (A \cup B)^c \\ A^c \cup B^c &= (A \cup B)^c \end{aligned} \quad \text{式 4- 3}$$

口訣：

餘事件的交集=聯集的餘事件

餘事件的聯集=交集的餘事件

例 4- 10

接續前例，

$$A^c \bigcap B^c = \{e, g, h\}$$
$$A \bigcup B = \{a, b, c, d, f\}$$
$$(A \bigcup B)^c = \{e, g, h\}$$

4-3 排列組合

所謂排列(permutation)是指有限的事物作有次序的安排，而排列數為這些所有可能不相同的排列數目。例如一個集合{a, b, c}其成員有以下六種不同的排列方式：

abc, acb, bac, bca, cab, cba

假設一個集合共有 n 個成員，挑選任意 r 個排列，其排列數表示成 P_r^n。此一排列共有 r 個位置，第一個位置有 n 種選擇，第二個位置有 $n-1$ 種選擇，第三個位置有 $n-2$ 種選擇，而第 r 個位置有 $n-r+1$ 個選擇，所以

$$P_r^n = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad \text{式 4- 4}$$

當 $r = n$ 時，$P_n^n = n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = n!$ 代表 n 個元素的排列數。例如,

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$。

例 4- 11

甲, 乙, 丙三班進行籃球比賽，比賽名次有哪幾種可能？

按名次順序共有以下 3!=6 種。

甲乙丙, 甲丙乙, 乙甲丙, 乙丙甲, 丙甲乙, 丙乙甲

例 4- 12

在集合{a, b, c, d} 中任抽兩個排列，共有 $P_2^4 = 4 \times 3 = 12$ 種。

{ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc}

例 4- 13

班上 50 位同學中任選出 2 位當班代與副班代，請問有幾種可能結果？

$$P_2^{50}=50\times 49=2450$$

注意：甲生當班代，乙生當副班代和乙生當班代，甲生當副班代是不同的結果

組合(combination)是一種選取後的集合，兩個集合若其成員相同，就是相同的組合。即使排列的次序不同，但元素相同被視為同一組合。例如，abc, acb, bac, bca, cab, cba 這六種排列，每一排列的成員都是一樣的，所以僅視為一種組合。

假設一個集合共有 n 個成員，挑選任意 r 個，其組合數表示成 C_r^n。我們已知若乙排列而言，共有

$$P_r^n=n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

種排列。然而，任意 r 個不相同的成員，可以有 $r!$ 排列數是相同的組合，所以，組合數

$$C_r^n=\frac{P_r^n}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!r!} \qquad \text{式 4- 5}$$

當 $r=n$ 時，$C_n^n=1$ 表示從 n 個元素選 n 個只有一種組合，就是全選。另外，當 $r=0$，也就是不選任何一個，此種情形也只有一種，所以 $C_0^n=1$。

性質：$C_r^n=C_{n-r}^n$。其意為從 n 個成員，挑選任意 r 個與挑選任意 $n-r$ 個是相同的一件事。例如，有 6 個同學要去內灣烤肉，有兩個人要騎一輛機車，另外四個人開一輛汽車前往。所以，從 6 人中抽選 2 人騎機車和抽選 4 人開一輛汽車是相同的意義。以下是我們的證明：

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$C_{n-r}^n = \frac{n!}{(n-(n-r))!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

例 4- 14

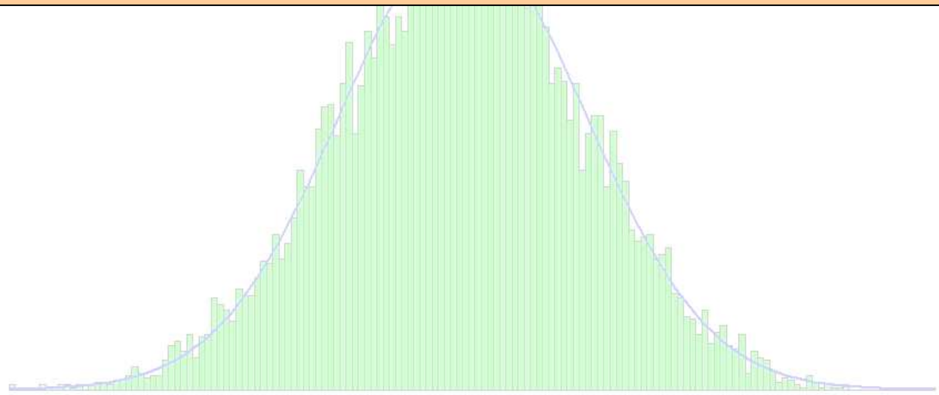
從集合中{a, b, c, d} 任抽兩個的組合有以下 $C_2^4 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6$ 種

ab, ac, ad, bc, bd, cd

例 4- 15

班上 50 位同學中任選出 2 位當任幹部，請問有幾種可能的組合？

$$C_2^{50} = \frac{50 \times 49}{2} = 1225$$



習題

1. 請寫出一次投擲兩枚錢幣出現正、反面之樣本空間。
2. 請寫出擲 2 個骰子的樣本空間，和為 8 點的可能組合有幾種，請列出。
3. 有 12 個電子零件，其中有 3 個嚴重缺點、2 個次要缺點、7 個無缺點，共有多少種可能組合。
4. 已知樣本空間為 $S=\{a,b,c,e,d,f,g\}$，有三個事件為 $A=\{\mathrm{a, b, c}\}$，$B=\{\mathrm{c, d}\}$，$C=\{\mathrm{a, b, e, f}\}$，試求 $A\cap(B\cup C)$ 和 $A^c\cap B$。
5. 已知樣本空間為 $S=\{1,2,3,4,5\}$，兩個事件 $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{3, 4, 5\}$，試求 $A\cup B$。
6. 從 10 人中欲選出 2 個值日生，有幾種不的選出方法。
7. 請用圖示法標繪出 $A\cup(B\cap C)$ 的區域。
8. 10 位同學中任選 3 人，有幾種選擇？排成一列，有幾種排法？排成一圈，有幾種排法
9. 一副牌中隨機抽出 5 張，同花順，鐵支，full house 的組合數各有幾種。
10. 已知 20 個球中，有 15 個白球，5 個紅球，隨機抽出 3 球，恰有 2 個白球的組合數？
11. 校慶運動會共有 5 系參加啦啦隊比賽，前三名有幾種組合？
12. 舉一例說明狄摩根定理。

重點摘錄